力学　講義メモ
前半

社会工学科
環境都市分野
岩本政巳

授業の目的

- 高校の物理と大学の力学との橋渡し
- 高校でも習った基本的な事項（例えば，ニュートンの３法則）を確認しつつ…
- 専門科目に関わる「考え方」を学ぶ
  - 覚えるのではなく，論理的に道筋を立てて考える
  - 覚えることはできるだけ少なく
  - 式はあまり使わない

授業の内容

- ５回：高校の復習
  1. ニュートンの３法則
  2. 力のつり合い
  3. 質点の運動
  4. 運動量と力積
  5. 仕事とエネルギー
  - 中間試験

- 専門への橋渡し
  1. 惑星の運動
  2. 角運動量
  3. 質点系の力学
  4. 剛体の運動
  5. 相対運動
  - 期末試験

はじめの5回：高校の復習

- ニュートンの３法則
  1. 慣性の法則
  2. 運動方程式　⇨　（広義の）運動方程式
  3. 作用・反作用　⬄　運動量保存則
- 力のつり合い
  ⇩
  （広義の）運動方程式
- 質点の運動
  - 重力，空気抵抗，バネ（単振動）
- 運動量と力積：衝突問題
- 仕事とエネルギー：保存力とポテンシャル

第1回の内容

- ニュートンの３法則

- その前に…
  - 物理の式と数学の式
  - 次元
  - ベクトルとスカラー
  - 時間微分と空間微分

物理の式と数学の式

- $f = m + a$ は成立するか？

- 数学的には成立する
  - 数学は汎用ツール
  - 変数にはどんなものでも入れられる
  - $f = m + a$ も $a = b + c$ も同じ

- 物理学的には成立しない
  - 変数はすべて物理量：物理的な意味をもつ
  - 質量 m と加速度 a を足すことはできない

物理の式

- 物理量はすべて物理的な意味（次元）をもつ
  - 異なる物理量を同等には扱えない
    - ・イコールで結べない
    - ・足す（引く）こともできない

- 同等 ＝ 互いに変換可能 ⇨ 同じ次元をもつ
  - 例えば，運動量と力積，仕事とエネルギー
  - 同じ次元の物理量が変換可能とは限らない
    - ・例えば，エネルギーとモーメント［力×長さ］

物理の式

- 同等 ＝ 互いに変換可能 ⇨ 同じ次元をもつ
  - 互いに変換可能 なものしかイコールで結べない
  - 足す（引く）こともできない
  - 同じ次元の物理量が変換可能とは限らない

- 物理式の各項はすべて同じ次元をもつ
  - 例えば，$f = ma$ ：各項とも「力」の次元
  - $f = m + a$ は成立しない

物理量の次元

- 力学の物理量は，次の３つの「次元」の組み合わせで表現できる

  - 質量（Mass）　　：［M］
  - 長さ（Length）　：［L］
  - 時間（Time）　　：［T］

※その他の次元：電流，温度，物質量，光度

※次元と単位をきちんと区別すること

・例えば長さ：m，kmなど単位は多くあるが…

力学に関する物理量の次元

- 位置：［L］
- 速度：［LT^{-1}］
- 加速度：［LT^{-2}］
- 角度（傾き）：
  ［1］＝ 無次元
- 振動数＝サイクル／時間：
  ［T^{-1}］
- 角速度（角振動数）
  ＝角度／時間：［T^{-1}］
- 面積：［L^{2}］
- 力＝質量×加速度：
  ［MLT^{-2}］
- 運動量＝質量×速度：
  ［MLT^{-1}］
- 力積＝力×時間：
  ［MLT^{-1}］
- エネルギー＝仕事
  ＝力×移動距離：
  ［ML^{2}T^{-2}］
- 圧力？
- 仕事率？

次元解析(p.22)

- 物理式の各項はすべて同じ次元をもつ

- 次元解析：このことを利用して…
  - 物理量どうしの関係を予想，解析すること
    - 式の中の未知の物理量の次元を知る
    - 与えられた物理量から別の物理量の式を予想

  - 注意：予想はあくまで予想
    - 同じ次元の物理量が変換可能とは限らない

物理問題の解法

1. 物理法則に則って方程式を立てる
   - 式の中の変数はすべて物理量
   - 各項の物理的意味（次元）は一致

2. 数学的に方程式を解く
   - 解く際は物理的な意味を考える必要はない
     - 式の形が同じなら別の現象でも同様に解ける
     - 例えば，2次方程式
   - 解の物理的意味は解いたあとに考えればよい

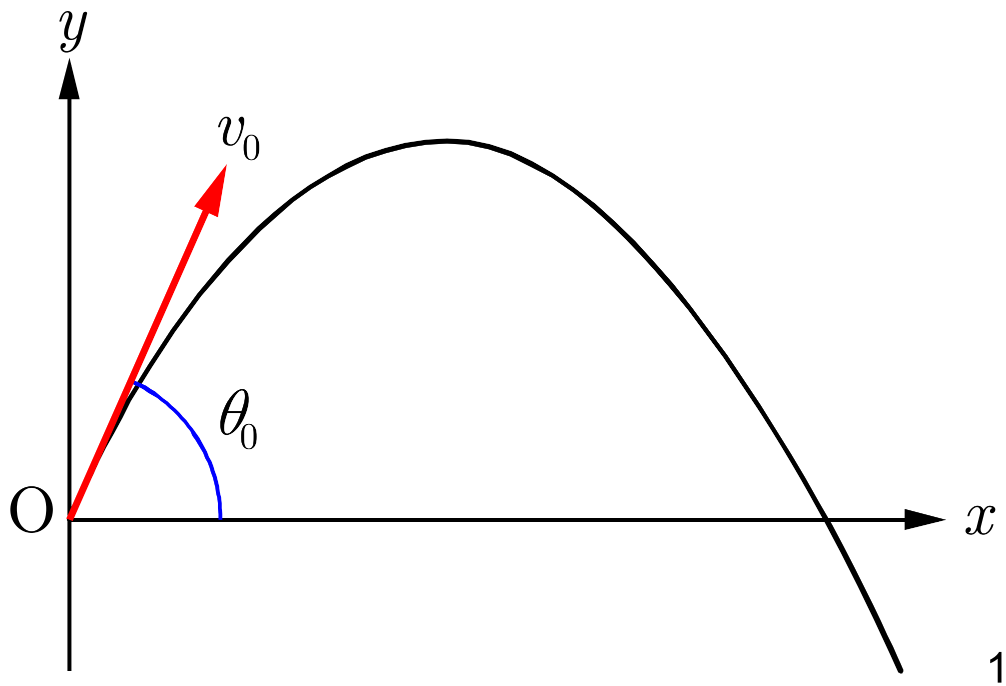
ベクトルとスカラー(p.5)

- ベクトル：大きさと向きを持つもの
  - 位置，速度，加速度
  - 力
  - 運動量（質量×速度），力積（力×時間）

- スカラー：大きさをもつが，向きを持たないもの
  - 質量，時間
  - エネルギー（力と変位の内積）
  - ベクトルの大きさ（絶対値）：長さ，速さ

微分と積分(p.7)

- 時間微分と空間微分
  - 数学的には差異はないが，物理的にはある
- 例題：質点の放物運動
  - x：水平位置
  - y：鉛直位置
    - 次元は［L］



微分と積分(p.7)

● 時間微分

- 位置 y ［L］

微分⇩⇧積分

- 速度 ［L T^{-1}］

$$v = \frac{dy}{dt}$$

微分⇩⇧積分

- 加速度 ［L T^{-2}］

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

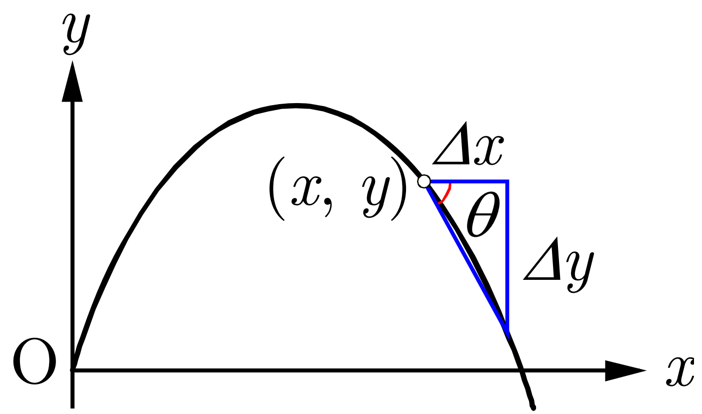
● 空間微分

- 位置 y ［L］

微分⇩⇧積分

- 傾き（角度） ［1］

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$



微分の記述方法(p.7)

- 数学：一般にプライム記号を用いる
  - $y = f(x)$ ⇨ $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ⇨ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$
- 力学：時間微分にはドットを使うことが多い
  - 時間微分：ドット
    - 位置 y ⇨ 速度 $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ ⇨ 加速度 $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$
  - 空間微分（時間微分以外）：プライム
    - 位置 y ⇨ 傾き $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ⇨ 曲率 $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

ニュートンの3法則(p.16)

第１法則：慣性の法則

- 物体は，力の作用を受けない限り，静止の状態，あるいは一直線上の一様な運動を続ける

第２法則：運動の法則

- 運動量が時間によって変化する割合はその物体に働く力に比例し，その力の向きに生じる

第３法則：作用・反作用の法則

- 物体１が物体２に力を及ぼすとき，物体２は必ず物体１に対し，大きさが同じで逆向きの力を及ぼす

第2回の内容

- ニュートンの３法則に関連して…

  - 高校の力学と大学の力学
  - 力のつり合い
    - 質点
    - 剛体など，大きさのある物体
    - モーメント
  - ダランベールの原理
    - 運動の法則と力のつり合い

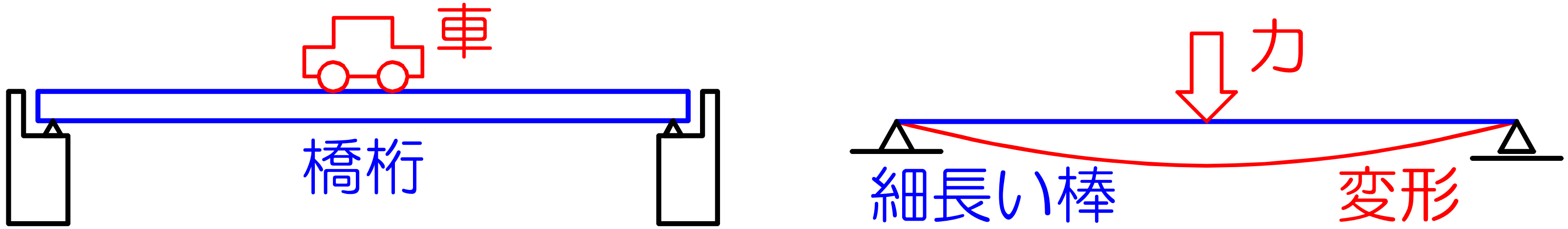
高校の力学と大学の力学

- 高校の力学：
  1. 運動している物体：運動の法則 ⇦ これメイン？
  2. 静止している物体：力のつり合い
  - 物体そのものは変形しない：質点，剛体

- 大学の力学：
  - 静止している物体を扱うことが多い
  - ただし，物体は変形する：弾性体，流体
  - 力によって物体がどう変形するか

大学の力学問題の例

- 橋の変形
  - 橋桁：細長い棒でモデル化
  - 橋の上を通る車の重さ：外力として与える
  - 力によって，棒はどのように変形するか
    棒の中にはどのような力がかかるか



  - 解くためには「力のつり合い」がとても大事

力のつり合い（高校の物理で習うこと）

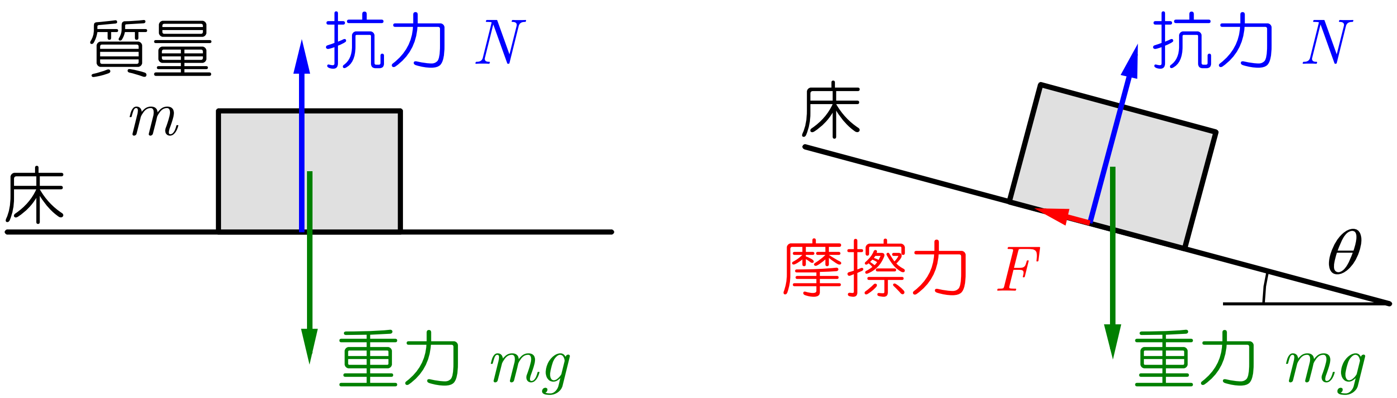
- 運動の法則：
  - 物体に力が作用 ⇨ その物体には加速度が生じる
- 慣性の法則：
  - 物体に力が作用しない

    ⇨静止，等速度運動（加速度が生じていない）

- 力が作用しているのに，静止（等速度運動）
  - この状態を「力がつり合っている」という
  - 働いている力の合力がゼロ

力のつり合い

- 床の上で静止している物体
  - 水平な床：２つの力（重力と抗力）
  - 斜めの床：３つの力（＋静摩擦力）



- 働いている力の合力（ベクトル和）がゼロ

大きさのある物体

- 質点系：質点の集まり（質点２つ以上）
- 剛体：質量と大きさをもち，変形しない物体
- 弾性体：変形する物体

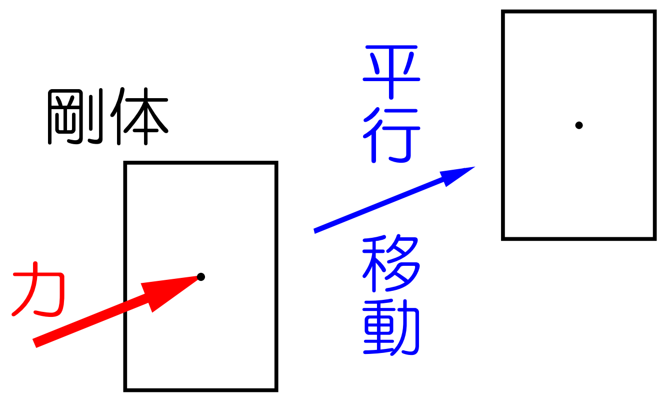
- これらの物体でも，力のつり合いは成立する
  - 質点と同様
  - 全体でも，どのような部分をとりだしても

- 大きさがある ⇨ 回転ができる

大きさのある物体の運動

- 例えば，宇宙空間に浮かぶ剛体に力を加える
  - 重心に作用

    ⇨ 平行移動

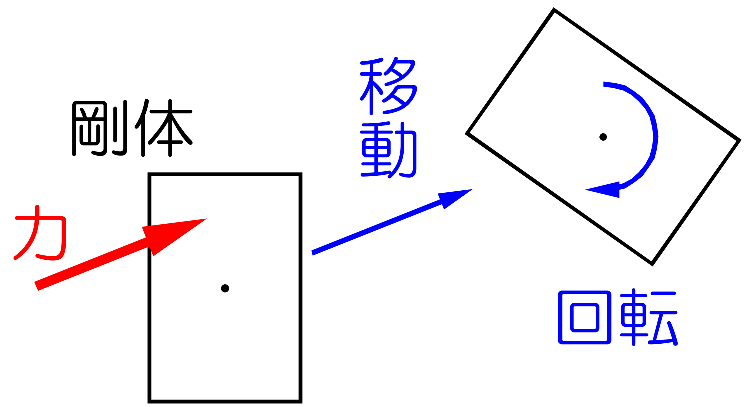


  - 重心を外した力

    ⇨ 回転しながら移動

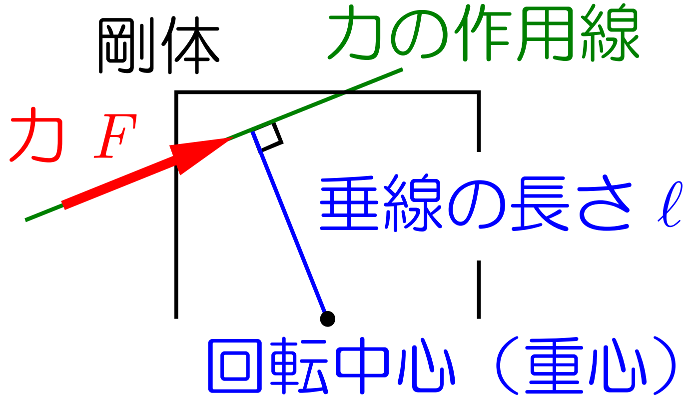
  - 回転させようとする力：

    「モーメント」と呼ぶ



力のモーメント

- モーメント ＝ 力 F × 腕の長さ ℓ
  - 腕：回転中心から力の作用線に降ろした垂線
- 回転させようとする作用
  - 力 F に比例
  - 腕の長さ ℓ に比例
    - ・てこの原理



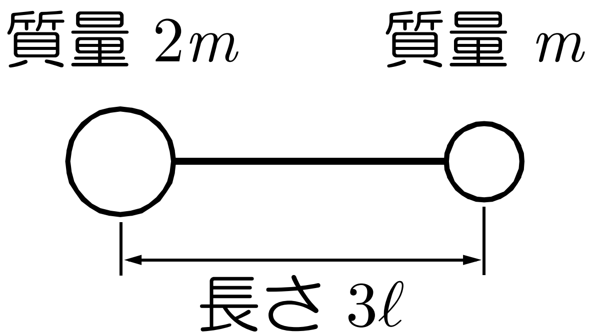
- モーメント：力×長さの次元［M L ^{2}T $^{-2}$］をもつ
  - 力ベクトルと作用点の位置ベクトルの外積

大きさのある物体の力のつり合い

- 平行運動（回転しない）：力のつり合い
- 回転運動：モーメントのつり合い

- 例題：２つの質点と重さのない棒からなる剛体
  - 傾けることなく１本の糸でつり上げたい
  - どの位置にひもをつければよいか

    ＝ 重心はどこか
  - つり上げる力はいくらか



まとめ

- 力のつり合いはどの方向にも成立
  - 水平，鉛直，その他…
- 力のつり合いはどんな物体でも成立
  - 質点，質点系，剛体，弾性体…
  - 全体でも，どのような部分をとりだしても
- 大きさのある物体ではモーメントもつり合う
  - 中心をどこにとっても成り立つ

高校の力学と大学の力学

- 高校の力学

1. 運動している物体：運動の法則
2. 静止している物体：力のつり合い

- 別々のものとして習う？

- 大学の力学
  - １，２をあまり区別しない
  - 運動している物体でも力のつり合いが成立

∵ ダランベールの原理

ダランベールの原理

- 運動方程式：$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$（質量×加速度＝力）
  - 左辺は「力」ではなく，物体の状態を表している：「質量mの物体に加速度 $\boldsymbol{a}$ が生じている」

⇩ $m\boldsymbol{a}$ を移項

- $\boldsymbol{f} - m\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$：力のつり合い（ΣF＝0）の形式
  - 「$-m\boldsymbol{a}$」は物体の状態ではなく，物体に働く見かけ上の力「慣性力」と解釈できる

- 物体が加速度運動していても力のつり合いは成立する，とみなせる．

第3回の内容

- 質点の運動

  - 運動方程式 ＝ 微分方程式
  - 放物運動：重力，空気抵抗
  - 単振動：バネふり子，単ふり子

  - 回転運動：円錐ふり子

バネふり子の運動（ダランベールの原理）

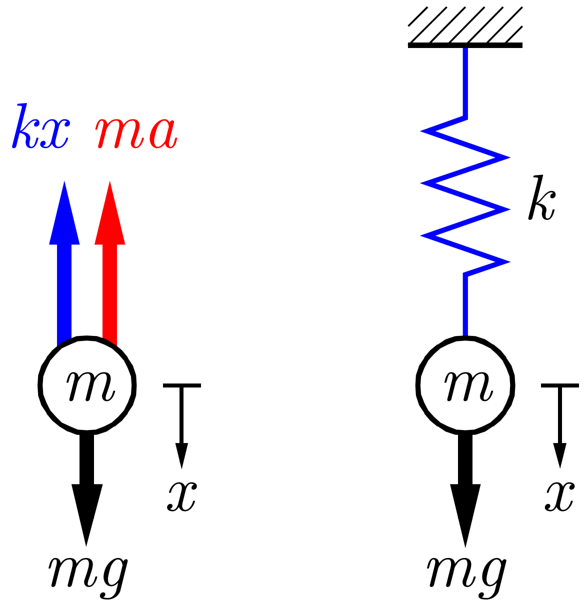
- おもりに働く力（下向き正）
  1. 外力：mg
  2. バネ：$-kx$
  3. 慣性力：$-ma$

  ⇩ 力のつり合い

- $\downarrow \Sigma F = mg - kx - ma = 0$

  ∴ 運動方程式： $ma + kx = mg$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg \quad (m\ddot{x} + kx = mg)$$：微分方程式



微分方程式とは

- 簡単に言うと，微分を含んだ方程式

  1. 求めたい未知の関数：$f(x)$
  2. その導関数：$f'(x)$， $f''(x)$， …， $f^{(n)}(x)$
  3. 変数：x

  に関する方程式

$$G(f(x), f'(x), f''(x), \ldots, ,f^{(n)}(x) \ , \ x \ ) = 0$$

- 「力学」の授業では解法は扱わない
  - 環境都市分野：後期の「社会工学基礎 II」で習う

微分方程式がなぜ重要か

- 物理現象の支配方程式：
  しばしば微分方程式で表される
  - 質点の運動方程式
  - はり（細い棒＝橋桁）の曲げ変形
  - 波動方程式（弦の振動等）
  - ナビエーストークス方程式（流体力学）
  - ラプラス方程式（熱，電磁気等）

- 自然現象だけでなく，社会現象などの分析にも

物理問題の解法

1. 物理法則に則って方程式を立てる
   - 今日はこの練習をする

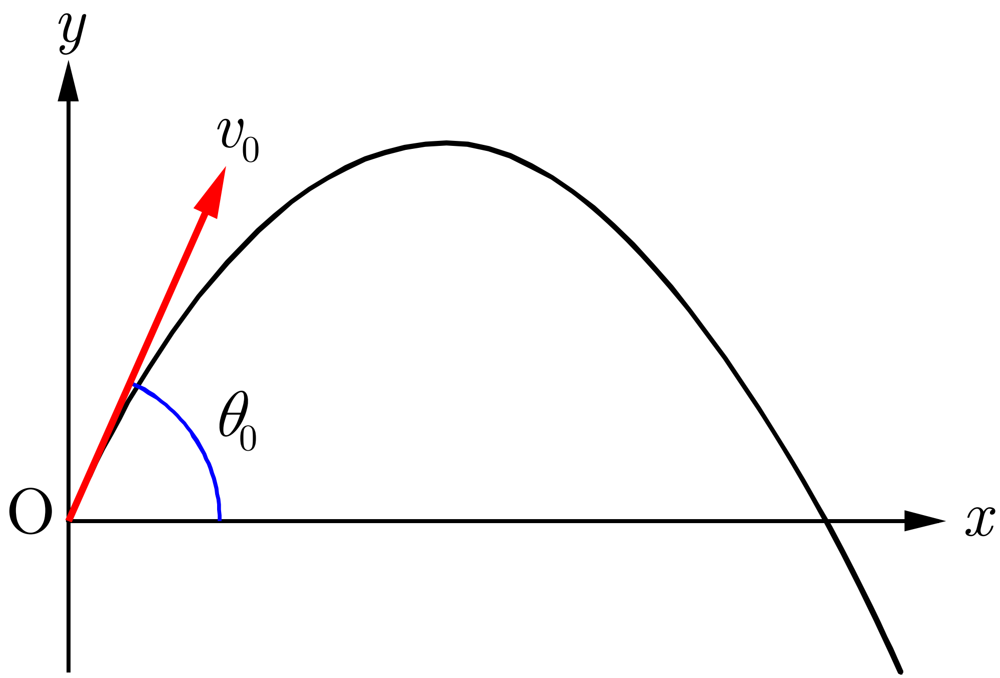
2. 数学的に方程式を解く
   - 解く際は物理的な意味を考える必要はない
   - 解の物理的意味は解いたあとに考えればよい
   - 微分方程式の解法については,
     この授業では扱わない

方程式を立てるときの注意

- 各項の次元が一致することを確認
  - 式の中の変数はすべて物理量
  - 各項の物理的意味（次元）は一致

- 力の向き（符号）を意識する
  - 座標の向きが正：どの方向を正にするかは自由
  - 逆向きは負
  - １次元でも向き（正負）はある

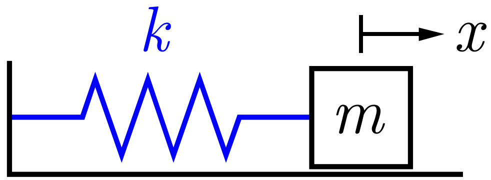
放物運動(p.52)



- 質量m のおもりを図のように投げる
- x 方向，y 方向の運動方程式を立てよ
  1. 重力のみ考慮
  2. 重力＋空気抵抗を考慮
     - 抵抗力：運動（速度v ）と逆方向に，$\beta m v$
- 速度，加速度は，x ，y の微分を使って記述せよ

単振動(p.37)

- 図のような
  水平バネふり子を考える

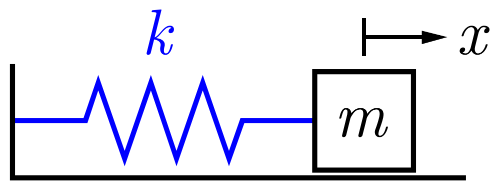


- 運動方程式を立てよ

1. バネのみ考慮
2. バネ＋空気抵抗を考慮
   - 抵抗力：運動（速度v）と逆方向に，cv
3. バネ＋空気抵抗＋外力を考慮
   - 外力：x方向（右向き）に，$F(t)$

単振動(p.37)

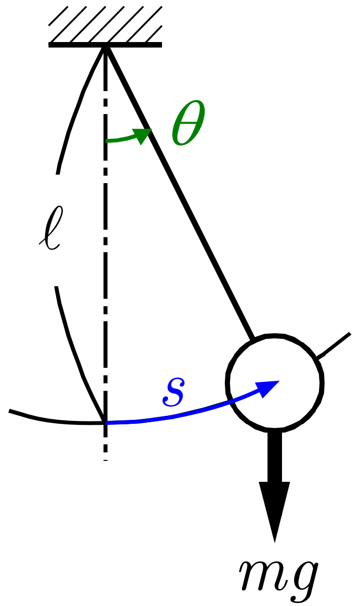
- 運動方程式の一般形



  - $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$
  - 数学的には，定数係数の２階線形常微分方程式

- 抵抗力，外力がないとき： $m\ddot{x} + kx = 0$
  - そのときの解 ＝ 単振動： $x = a\cos(\omega t - \delta)$
  - 角振動数ωはいくらか？

単ふり子(p.40)



- 図の単ふり子について運動方程式を立てよ
  - 座標には角度θを用いよ
  - 円弧に沿ったおもりの位置s は次のように表せる
    - $s = \ell\theta$
  - 接線方向の力のつり合いを考えればよい

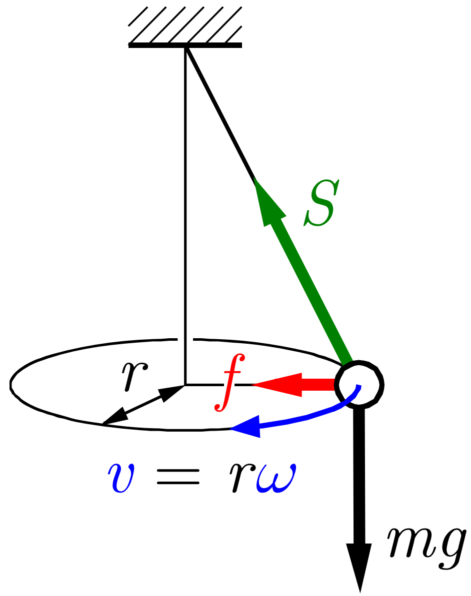
回転運動(p.57)

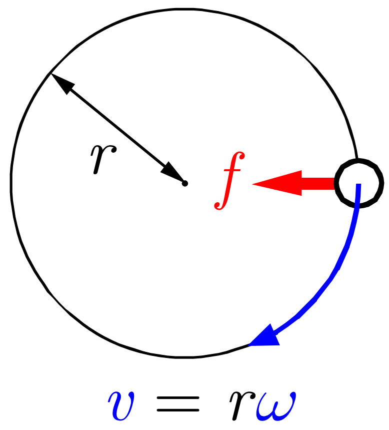
- 図の円錐ふり子を考える
  - 等速円運動：角速度ωが一定

    ⇧
  - 向心力：回転中心方向の力

    $$f = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r}$$

    - m：質量，r：回転半径
    - おもりは回転中心方向に
      $r\omega^2$の加速度を受け続けている
  - 向心力fの源は重力mg（と糸の張力S）



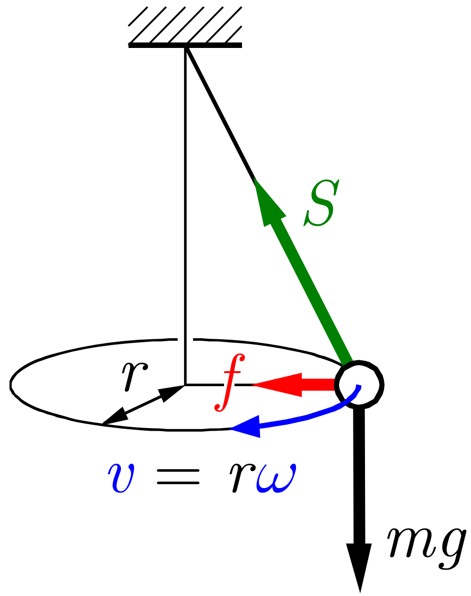


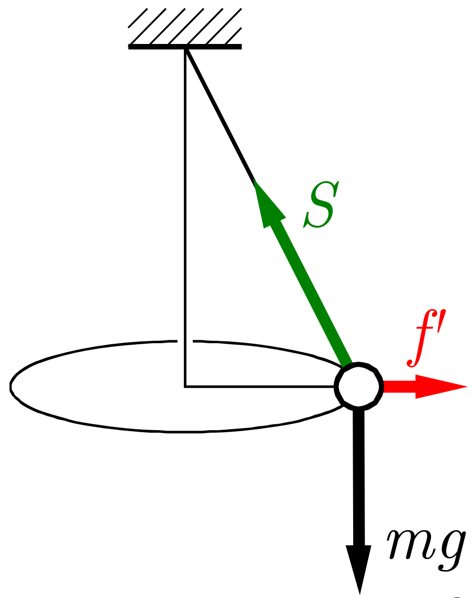
回転運動(p.57)

- 向心力fにより加速度が生じている
  - 運動の状態：$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$

⇩ ダランベールの原理

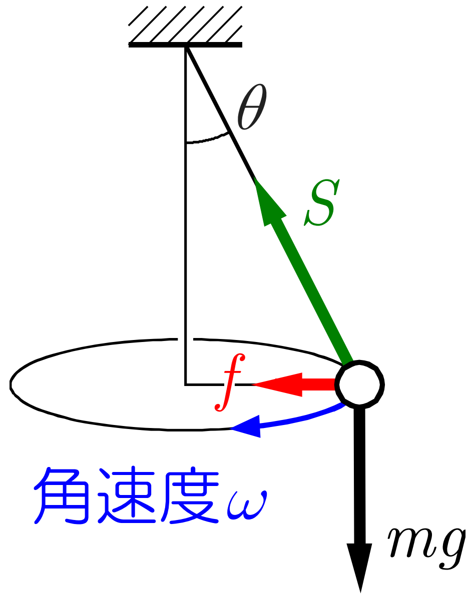
- 力のつり合い：$\boldsymbol{f} - m\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$
  - おもりには見かけ上の力「慣性力」が働いており，他の力とつり合っている
  - 慣性力：加速度と逆向きに働く
  - 慣性力 ＝ 遠心力f' ＝ −（向心力f）





回転運動（p.57）

- 図の円錐ふり子について答えよ
  - 糸の長さはℓ とする
  - 周期T を求めよ
  - 糸の張力S を求めよ



1. 重力mg と向心力f（遠心力f'）の関係
2. 向心力f（遠心力f'）と角速度ω の関係

   について考えればよい

第4回の内容

- 運動量と力積
  - 運動の法則と運動量
  - 運動量保存の法則
  - 反発係数と衝突問題
  - 万有引力と第１宇宙速度

第2法則：運動の法則

- 運動量が時間によって変化する割合はその物体に働く力に比例し，その力の向きに生じる
  - 「運動量＝質量×速度」と定義するなら，「運動量が時間によって変化する割合」すなわち運動量の時間微分は「力」そのもの

- 運動量：$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$（質量×速度）

⇩ 時間微分

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \quad \text{：力}$$

運動量と力積

- 運動方程式：$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$
  - 力$\boldsymbol{f}$ によって物体に加速度$\boldsymbol{a}$ が生じている

⇩ 時間積分

- 運動量の変化量＝力を時間で積分したもの＝力積

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f} dt \quad (= \boldsymbol{f} \times \Delta t)$$

- 運動量，力積の次元：
  - ［力×時間］＝［MLT^{-1}］

運動量保存の法則

- 第２法則：運動の法則
  - 物体に力が働くとき，その運動量は変化する

- 逆に，力が働かない場合はどうか

  - 第１法則：慣性の法則
    - ・力の作用を受けない限り，物体は直線運動する
    - ⇨ 等速度運動 ＝ 運動量は保存されている

  - 第３法則：作用・反作用の法則
    - ・2つの物体がある場合…

第3法則：作用・反作用の法則

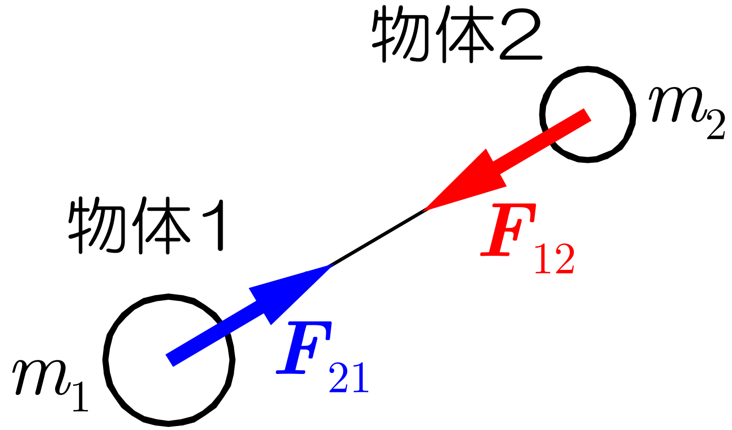
- 物体１が物体２に力を及ぼすとき，　⇨ $\boldsymbol{F}_{12}$
  物体２は必ず物体１に対し，
  大きさが同じで逆向きの力を及ぼす　⇨ $\boldsymbol{F}_{21}$

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{0}$$

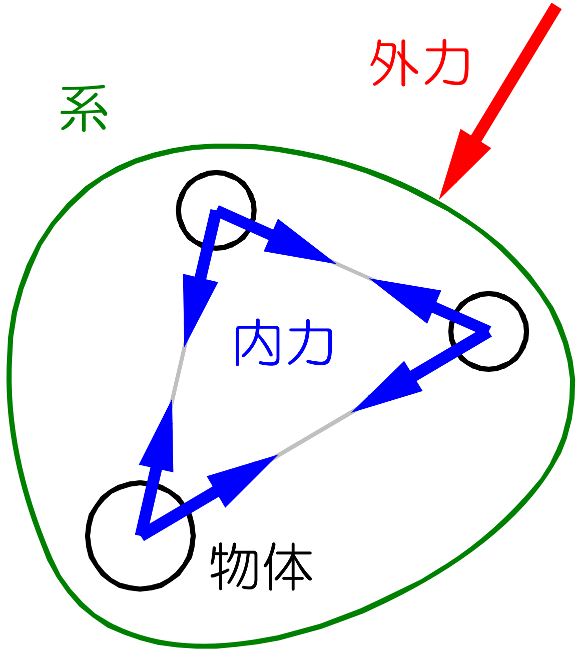
$$\Rightarrow m_1 \boldsymbol{a}_1 + m_2 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

⇩ 時間積分



$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = \mathrm{const}$$　：運動量の和は一定

運動量保存の法則



- 複数の物体があっても，全体をひとつの系としてとらえたとき
- 外力（系の外からの力）が作用しなければ
- 系の運動量（物体の運動量の和）は保存される
  - 内力（系を構成する物体どうしの力）は作用していてもよい
  - 物体どうし衝突してもよい

反発係数

- ２物体が衝突するときの,
衝突前の互いに近づく速さに対する,
衝突後の互いに遠ざかる速さの比
  - 衝突前後の相対速度の（大きさの）比
- 衝突によって,
  - 物体1の速度がv_1 からv_1' に,
  - 物体2の速度がv_2 からv_2' に，変わったとすると
  - 反発係数： $e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ （$0 \leqq e \leqq 1$）

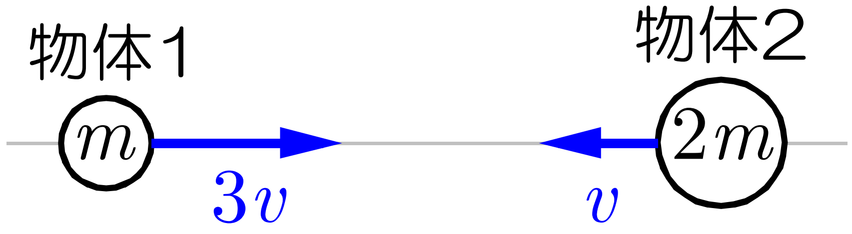
反発係数

- 衝突によって,
  - 物体1の速度がv_1 からv_1' に,
  - 物体2の速度がv_2 からv_2' に，変わったとすると
  - 反発係数： $e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ $(0 \leqq e \leqq 1)$
  - $e = 1$：(完全)弾性衝突 ⇨ 運動エネルギーが保存
  - $e \neq 1$：非弾性衝突 ⇨ エネルギーは保存されない
  - $e = 0$：完全非弾性衝突 ⇨ 2体はくっつく

衝突問題

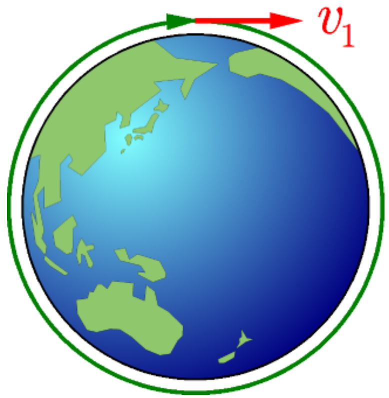
- 質量m の物体１と質量$2m$ の物体2が衝突した
  - 衝突後の速度
    - 物体１：v_1
    - 物体２：v_2

    を求めよ
    - v_1， v_2 はいずれも右向き正とせよ
  - 反発係数＝e とせよ
  - 衝突前後の運動エネルギーを求めよ



3つの宇宙速度

- 第１宇宙速度
  - 地球の人工衛星となるための速度（地表面高度）
  - 重力（万有引力）と遠心力がつり合う速度

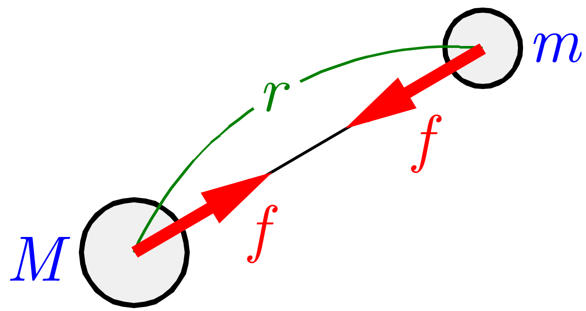


- 第２宇宙速度（脱出速度）
  - 地球の重力を振り切るための速度
- 第３宇宙速度
  - 太陽の重力を振り切るための速度

万有引力(p.100)

- すべての物体の間には質量による引力が働く．
その大きさは，物体の質量（の積）に比例し，
距離の２乗に反比例する

$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$



  - G：万有引力定数

$$G = 6.672 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$$

- 地球の質量をM，地球の半径をRとして，
重力加速度gを万有引力定数Gを用いて表せ

万有引力(p.100)

- 地球の質量をM，地球の半径をRとして，
  重力加速度gを万有引力定数Gを用いて表せ

$$f(R) = -G\frac{mM}{R^2} = -mg$$

$$\therefore \quad g = G\frac{M}{R^2}$$

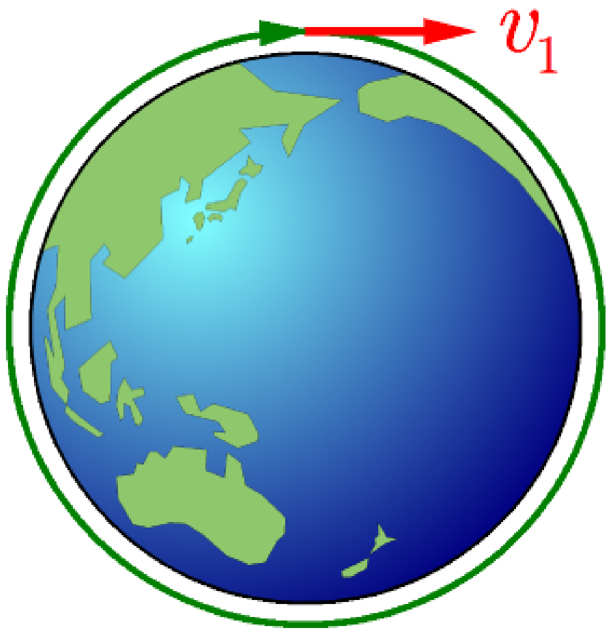
$$= 6.672 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \times \frac{5.975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\left(6.378 \times 10^{6}\,\mathrm{m}\right)^2}$$

$$= 9.80\,\mathrm{m/s^2}$$

第1宇宙速度(p.108)

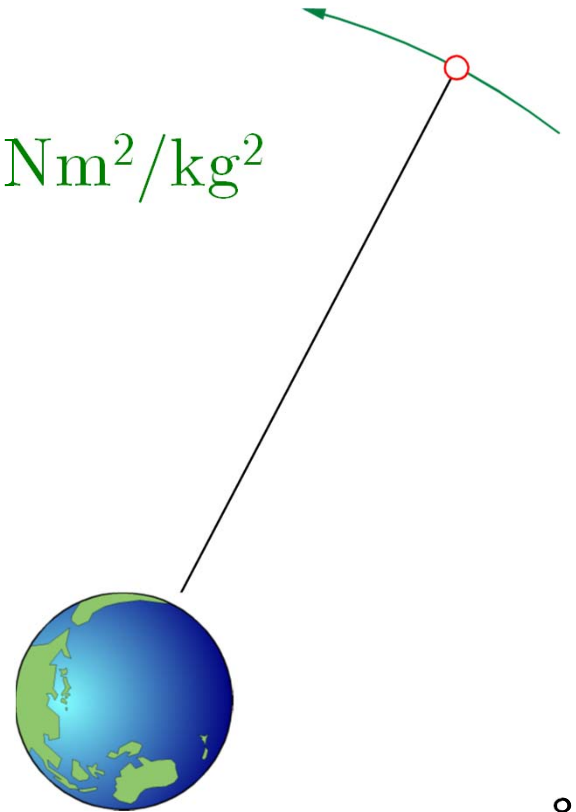
- 地球の人工衛星となるための速度（地表面高度）
  ＝ 重力（万有引力）と遠心力がつり合う速度

- 第１宇宙速度v_1 を求めよ
  - 地球の質量：M
  - 地球の半径：R
  - 重力加速度：g
    もしくは，万有引力定数：G



応用問題

- 地球の静止衛星の軌道半径 r_S を求めよ
  - 地球の半径：$R = 6{,}378$ km
  - 地球の質量：$M = 5.975 \times 10^{24}$ kg
  - 万有引力定数：$G = 6.672 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$
  - 周期：$T = 1$ 日 $= 86{,}400$ s



- 考え方は第１宇宙速度と同じ
  1. 衛星の速度 v を求める
  2. 周期 T を求め，１日と置く

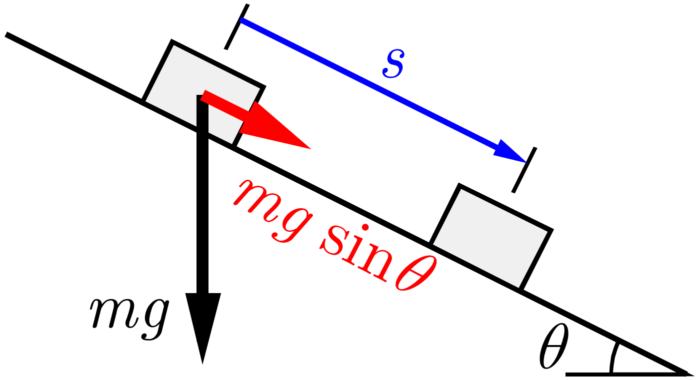
第5回の内容

- 仕事とエネルギー

  - 仕事
  - エネルギー
  - 保存力と位置エネルギー
  - エネルギー保存の法則
  - 第２，第３宇宙速度

仕事(p.64)

- 物体が力を受けて移動している．このとき力は物体に対し，「仕事をしている」という
  - 仕事の大きさ：力を移動の道のりで積分したもの
    - 物体の移動方向の力



  - $W = mg\sin\theta \times s$
  - $W = m\vec{g} \cdot \vec{s}$
    - 仕事 ＝ 力ベクトルと変位ベクトルの内積
  - 仕事の次元：［力×長さ］＝［ML^{2}T^{-2}］

エネルギー(p.43)

- 仕事に変換可能なもの：仕事と同じ次元をもつ
  - スカラー量：大きさを持つが方向は持たない

- 力学的エネルギー
  - 運動エネルギー：　$K = \frac{1}{2}mv^2$

    ＋

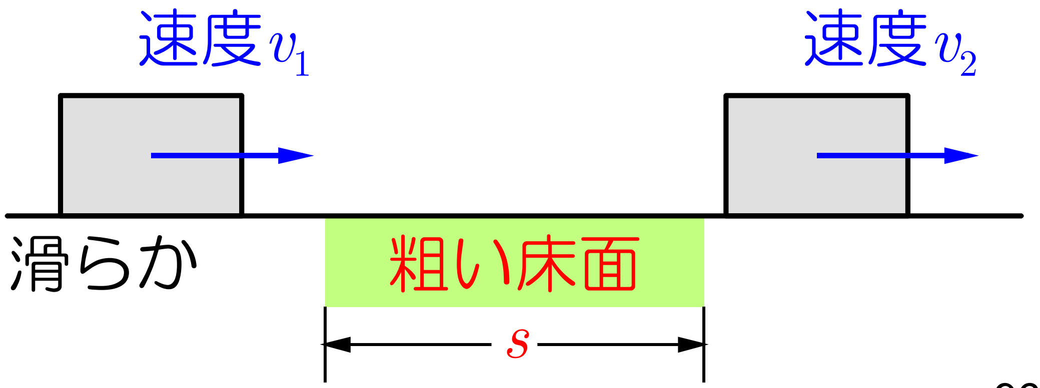
  - 位置エネルギー（ポテンシャル）：潜在的
    ・重力，バネの復元力によるエネルギー

$$U = mgh \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

運動エネルギーを仕事に変換する

- 水平で滑らかな床の上を滑る物体
  - 長さs の粗い床面を通過したとき
    速度がv_1 からv_2 に変化した

- 床面が物体になした仕事はいくらか
- 速度v_1，v_2 の関係を式に示せ
  - 物体の質量：m
  - 重力加速度：g
  - 床面の
    動摩擦係数：μ



保存力と位置エネルギー（p.43）

- 力 f が位置 s のみにより定まり，
  ある関数 $U(s)$ から次式で導かれる

$$f(s) = -\frac{dU(s)}{ds}$$

- このとき，力 f は保存力であるという

- $U(s)$ を力 $f(s)$ の位置エネルギー，
  あるいは，ポテンシャルという

保存力と位置エネルギー（p.43）

- 代表例
  - 重力：　$f(h) = -mg \quad \Leftrightarrow \quad U = mgh$
  - バネの復元力：　$f(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad U = \frac{1}{2}kx^2$
- 保存力：力が位置のみで決まる

$$f(s) = -\frac{dU(s)}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = -\int^{s} f(s)ds$$

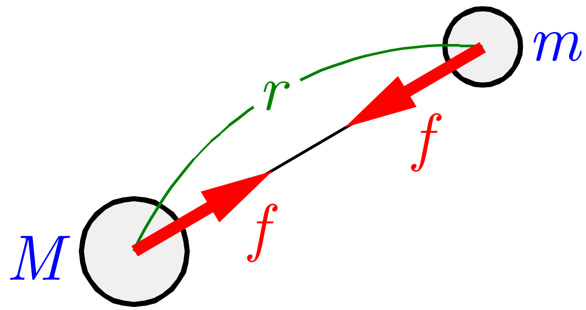
$\Updownarrow$

- 非保存力：位置だけで決まらない
  - 摩擦力（向きに依存），空気抵抗（速度依存）

万有引力(p.100)

- 万有引力も保存力
  - すべての物体の間には質量による引力が働く．
    その大きさは，物体の質量（の積）に比例し，
    距離の２乗に反比例する

$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$



- 万有引力の位置エネルギー

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} f(r)dr = -G\frac{mM}{r}$$

万有引力と重力

- 万有引力：

$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

- 地球上にある物体を考える
  - 地球の質量をM，地球の半径をR とすると, 物体が受ける力は一定の重力となる
  - 重力： $f(h) = -mg \quad \Leftrightarrow \quad U(h) = mgh$
    - ・ここで，重力加速度： $g = G\dfrac{M}{R^2}$

エネルギー保存の法則(p.43)

- 保存力のみが作用する場合,
  力学的エネルギーは保存される
  - 運動エネルギー ＋ 位置エネルギー ＝ const

$$ma = f(s) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \int^s f(s)ds + C$$

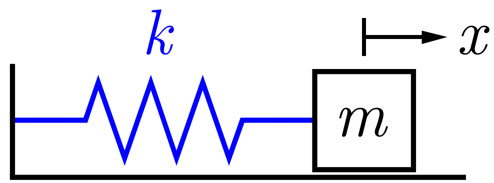
$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + U(s) = C$$

  - 乱暴な運動エネルギーの空間微分

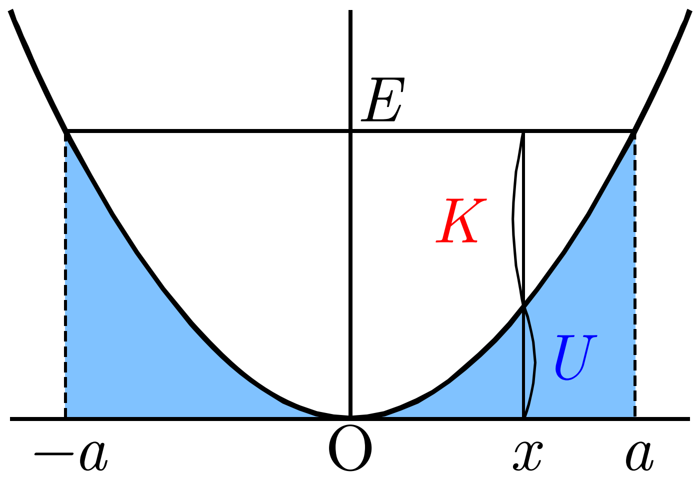
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \cdot \frac{dt}{ds} = m\cancel{v} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{\cancel{v}} = ma$$

エネルギー保存の法則(p.43)

- バネふり子のエネルギー
  - $x = a$ の位置で
    初速 v_0 でおもりを離す
  - 最大の速さはいくらか？



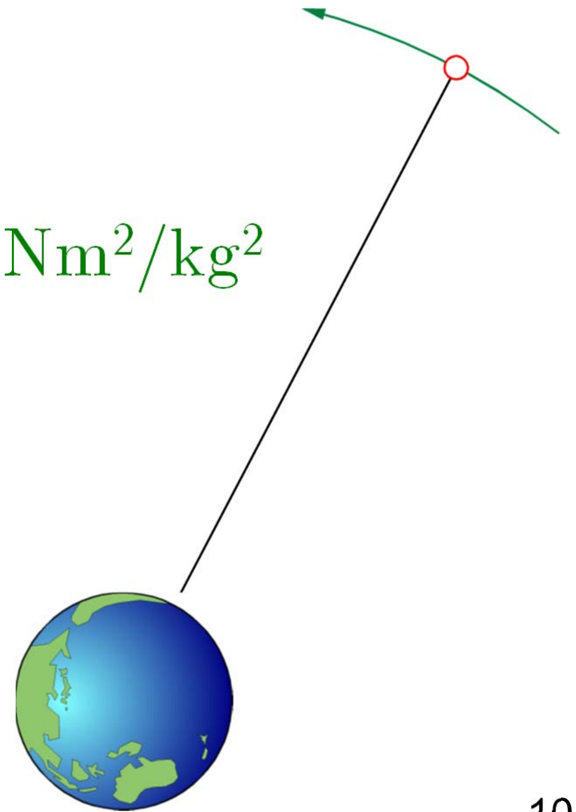
- $E = K + U$
- $K = \dfrac{1}{2}mv^2$
- $U = \dfrac{1}{2}kx^2$



静止衛星軌道への打ち上げ

- 地球の地表から，静止衛星軌道まで
  ものを打ち上げるのに必要な初速はいくらか
  - 地球の半径：$R = 6{,}378\ \mathrm{km}$
  - 地球の質量：$M = 5.975 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
  - 万有引力定数：$G = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
  - 軌道半径：$r_\mathrm{S} = 42{,}200\ \mathrm{km}$
  - 万有引力のポテンシャル

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

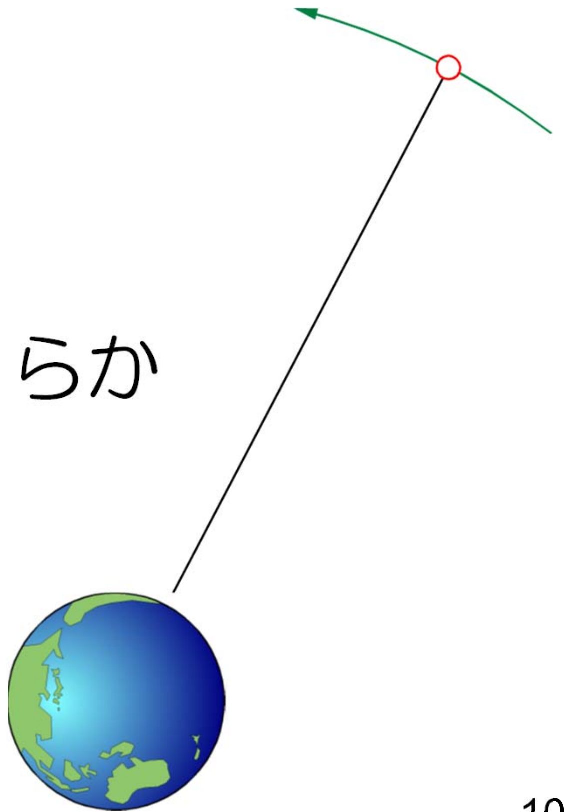


静止衛星の打ち上げ

- 静止衛星になるためには
  軌道上での速度がゼロではなく

$$v_{\mathrm{S}} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{S}}}}$$

- 地球の地表から，静止衛星を
  打ち上げるのに必要な初速はいくらか
  - 打ち上げただけで
    静止衛星軌道に
    乗れるわけはないが…



3つの宇宙速度

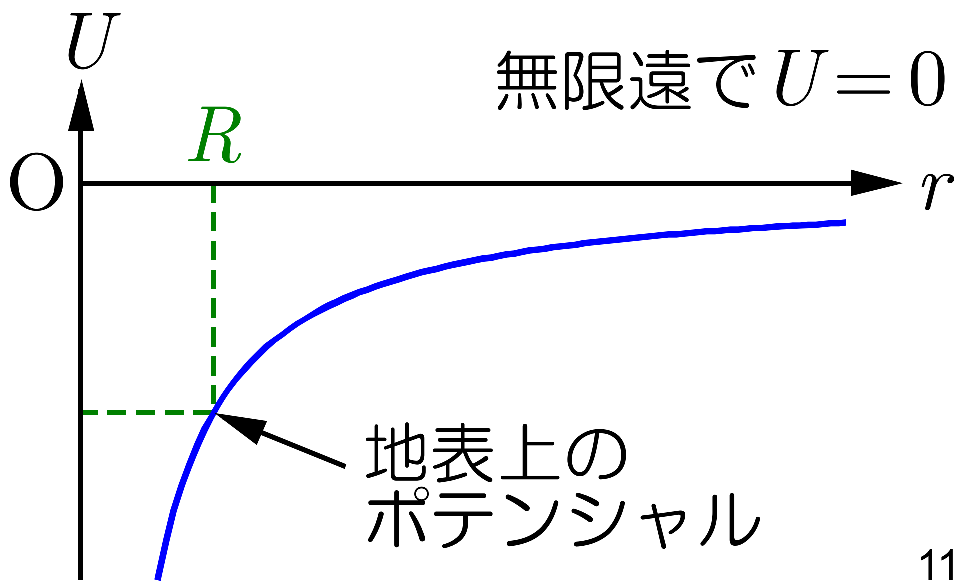
- 第１宇宙速度
  - 地球の人工衛星となるための速度（地表面高度）
- 第２宇宙速度（脱出速度）
  - 地球の地表から,
    地球の重力を振り切るための速度
- 第３宇宙速度
  - 地球の地表から,
    太陽の重力を振り切るための速度

第2宇宙速度(p.116)

- 地表面から地球の重力を振り切るための速度
  - 太陽は無視：地球のみが宇宙に浮かんでいる

- エネルギー保存則より，第２宇宙速度を求めよ
  - 地球質量：M
  - 地球半径：R
  - 万有引力のポテンシャル

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$



第3宇宙速度

- 太陽の重力を振り切るための速度
  - 地球の地表上から打ち上げるときの速度
    - 地球の重力を離脱し,
      さらに太陽の重力を離脱
  - 単純に重力を考えるだけではダメ
    ∵ 初速度が無視できない
  - 初速度 ＝ 地球の公転速度も考慮
    - 地球から打ち上げられた物体には,
      地球の公転速度がプラスされる
- 第３宇宙速度を求めるには…

第3宇宙速度

- 3ステップの計算が必要

1. 地球の公転軌道上で静止した状態から太陽の重力を振り切るための速度 v_{S} を求める
   - 第2宇宙速度同様，エネルギー保存則より

2. 地球の公転速度 v_{E} を求める
   - 第1宇宙速度同様，引力と遠心力のつりあい

3. 第３宇宙速度を求める
   - 地球の重力を振り切ったときの速度が，$v_{\mathrm{E0}} = v_{\mathrm{S}} - v_{\mathrm{E}}$ となる，地表面での打ち上げ速度

運動量とエネルギー

- 運動方程式：$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$（質量×加速度＝力）

⇩ 時間積分

  - 運動量＝力積：　$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f} dt$

- 運動方程式：$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$（質量×加速度＝力）

⇩ 空間（移動距離による）積分

  - エネルギー＝仕事：
    - $E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 - \int^{s} f(s) ds = \mathrm{const}$