力学　講義メモ
後半

社会工学科
環境都市分野
岩本政巳

授業の内容

- ５回：高校の復習
  1. ニュートンの３法則
  2. 力のつり合い
  3. 質点の運動
  4. 運動量と力積
  5. 仕事とエネルギー
  - 中間試験
- 専門への橋渡し
  1. 惑星の運動
  2. 角運動量
  3. 質点系の力学
  4. 剛体の運動
  5. 相対運動
  - 期末試験

後半の授業:専門への橋渡し

- 惑星の運動
  - ケプラーの法則
  - 中心力を受ける物体の運動 ⇨
- 質点系の力学：質点の集まり
- 剛体の運動：変形しない物体
  - 極慣性モーメント
- 相対運動
  - 慣性系と運動座標系 ⇨ コリオリ力

- 角運動量

⇩

面積の原理

⇩

回転運動
する物体

第7, 8回の内容:惑星の運動

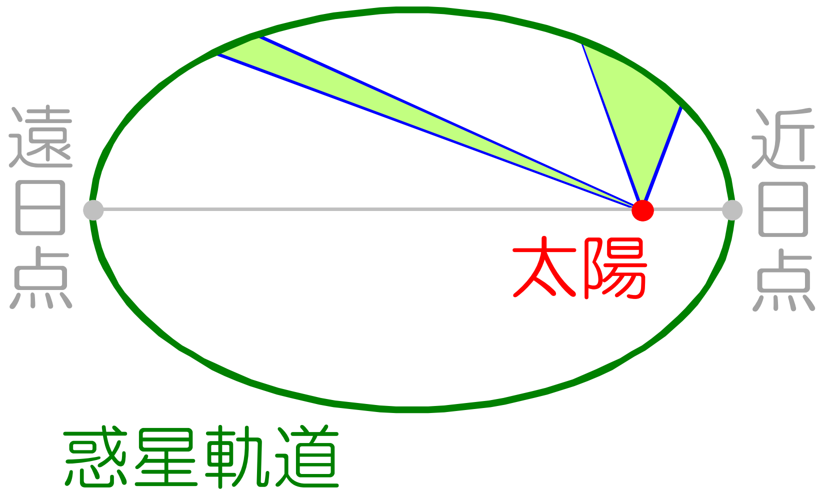
- ケプラーの法則（1609-1619）
  - 太陽のまわりを回る惑星の運動の法則性
  - 天体観測結果から帰納的に導き出されたもの
    - 経験則であり，理論的裏付けがなかった

- ニュートン（「プリンキピア」1687）
  - 運動の法則
  - 万有引力の法則

  により説明できることを明らかにした

- ２回の授業の目的：その過程を追体験する

ケプラーの法則



- 太陽のまわりを回る惑星の運動

第１法則：

・惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く

第２法則：面積の定理

・太陽と惑星を結ぶ直線が単位時間に掃過する面積（面積速度）は一定である

第３法則：

・惑星が太陽のまわりを回る周期の２乗は楕円軌道の長半径の３乗に比例する

第7, 8回の内容:惑星の運動

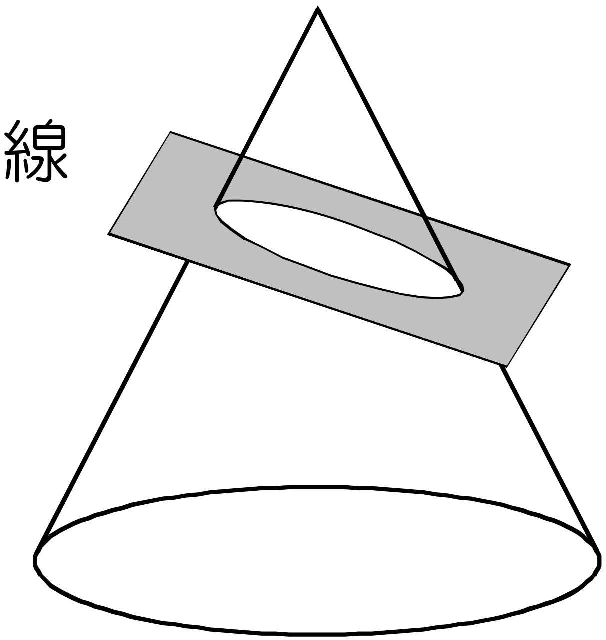
- 授業の流れ
  - 第１法則：楕円軌道
    - 楕円の式を導く
    - 惑星の運動を極座標で表す
  - 第２法則：面積の定理
    - 太陽の引力を受ける惑星の運動方程式を導く
    - その運動が第２法則に合致することを示す
  - 第３法則：公転周期
    - 惑星の運動から太陽の引力が持つ特性を探る
    - その特性から，万有引力の法則を導く

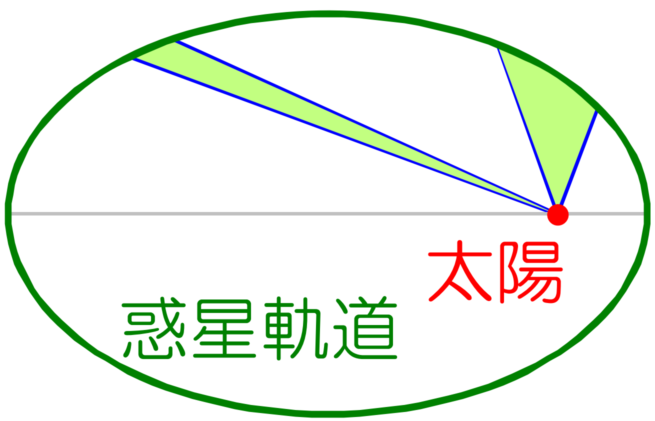
第7回の内容

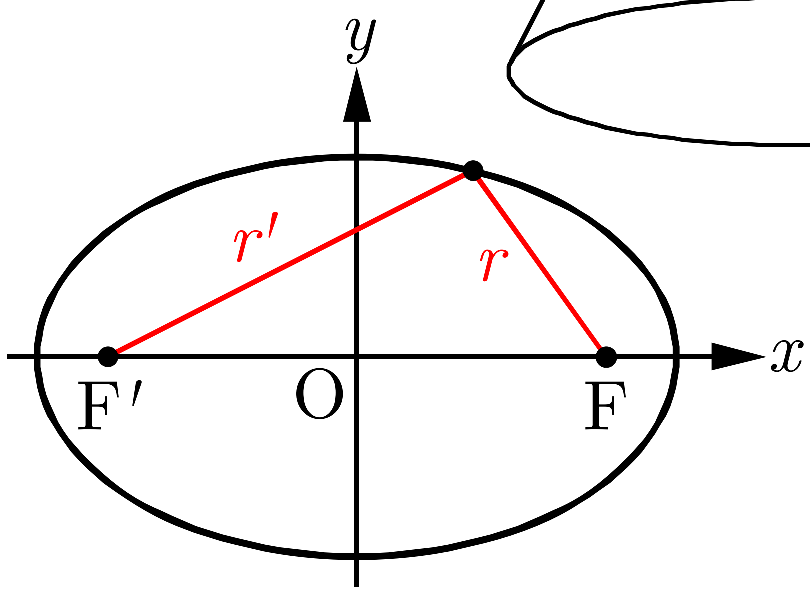
- 惑星の運動（下準備）
  - ケプラーの法則
  - 第１法則：楕円軌道
    - 楕円の式を導く ⇨ 極座標表示
  - 第２法則：面積の定理
    - 太陽の引力を中心力として表現
    - 中心力を受ける物体の運動方程式を導く
      ⇨ 極座標表示

ケプラーの第1法則:楕円軌道

- 楕円とは？
  - ２定点からの距離の和が一定の曲線
  - 円を１方向に圧縮，伸張したもの
  - 円錐を斜めに切ったもの

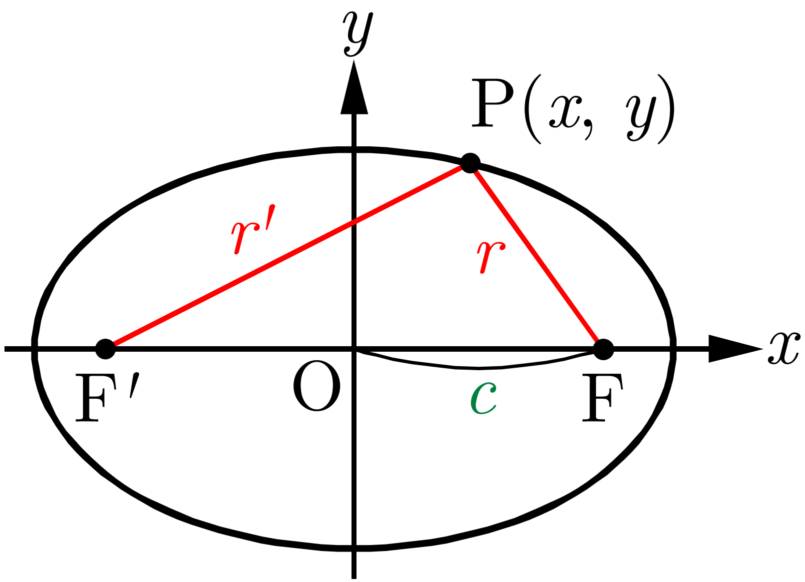






準備1：楕円の式を立ててみる

- ２定点からの距離の和が一定の曲線 $\mathrm{P}(x,\ y)$
  - 焦点 F，F$'$：原点からの距離を c とする
  - PFの距離： $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
  - PF'の距離：$r' = \cdots$
- 距離の和が一定
  - $r + r' = 2a$ とおく
- 楕円の式を立ててみる
  - r，r' を消去せよ



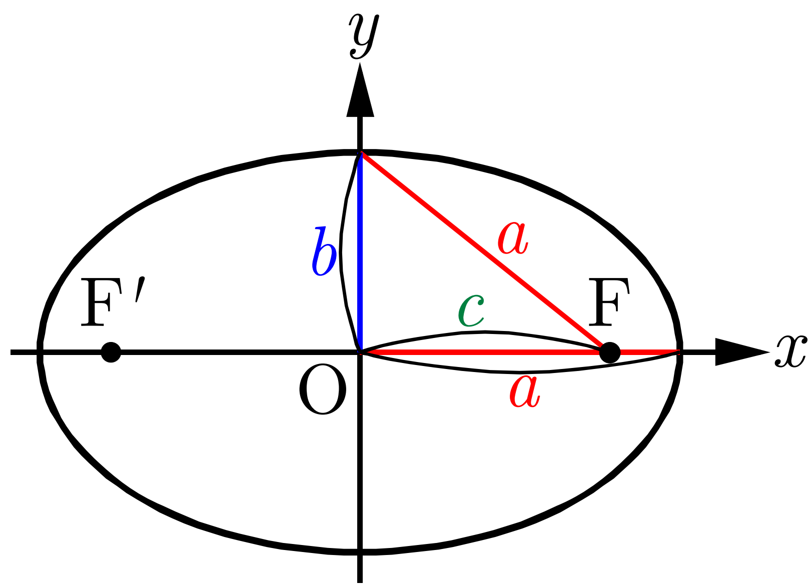
楕円の式を立ててみる

- $\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$

  - $b^2 = a^2 - c^2$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

    - a：長軸半径
    - b：短軸半径

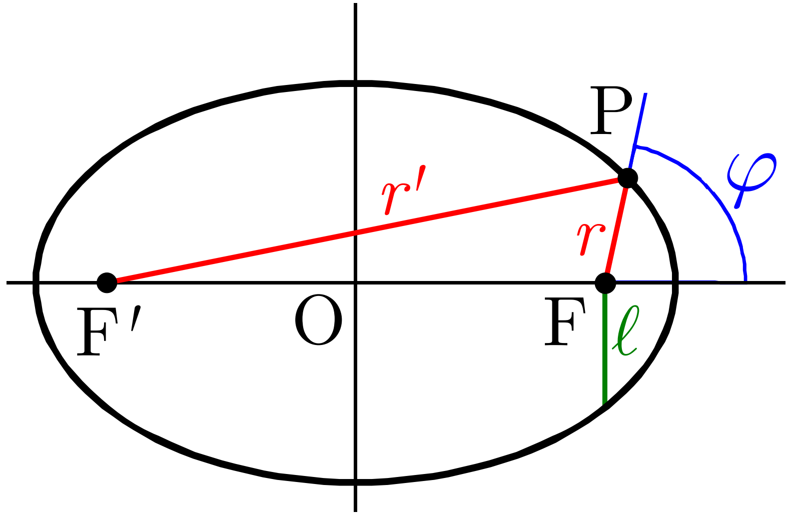


- $(x,\, y)$ 座標ではなく，極座標 $(r,\, \varphi)$ での楕円の式を立ててみる

楕円を極座標で表す

- 極座標での楕円の式

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$



- 離心率　　$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$

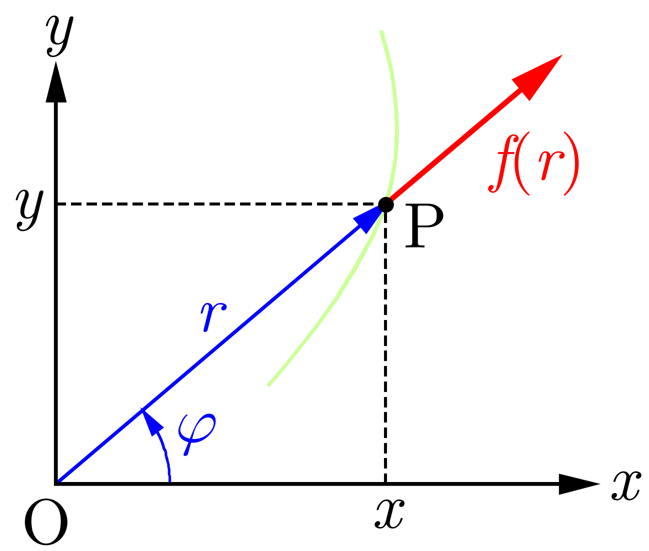
- 半直弦　　$\ell = \dfrac{b^2}{a}$

- この２つを使って　$a = \dfrac{\ell}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \dfrac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

ケプラーの第2法則:面積の定理

- 惑星の運動の規則性
  - 太陽からの引力がその要因
    - 引力は太陽の方向に働く
    - 引力の大きさは太陽との距離に依存する

- このような力を中心力という
  - 定点（力の中心）を通る
  - 中心からの距離の関数である
  - 外向き生：引力だと負



準備2：中心力と平面極座標

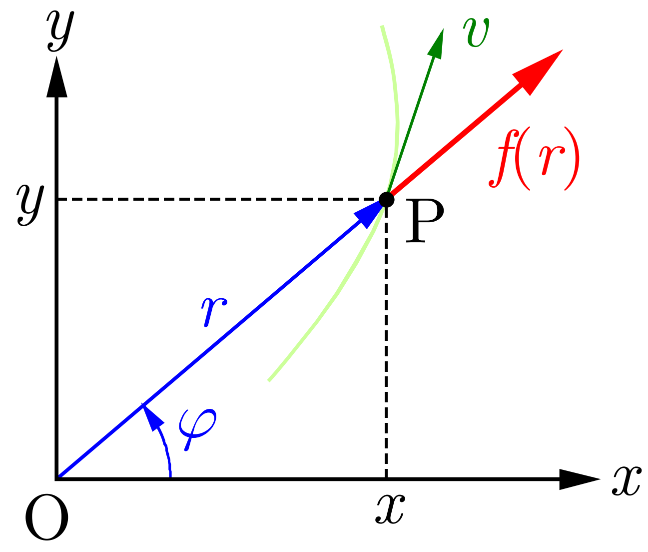
● 中心力を受ける
物体（質点）運動を考える

- 運動の法則にしたがって，
  運動方程式を導く

1. 質点の位置
   $(x,\ y) = (r,\ \varphi)$を微分して
   速度 $\boldsymbol{v}$，加速度 $\boldsymbol{a}$をもとめる

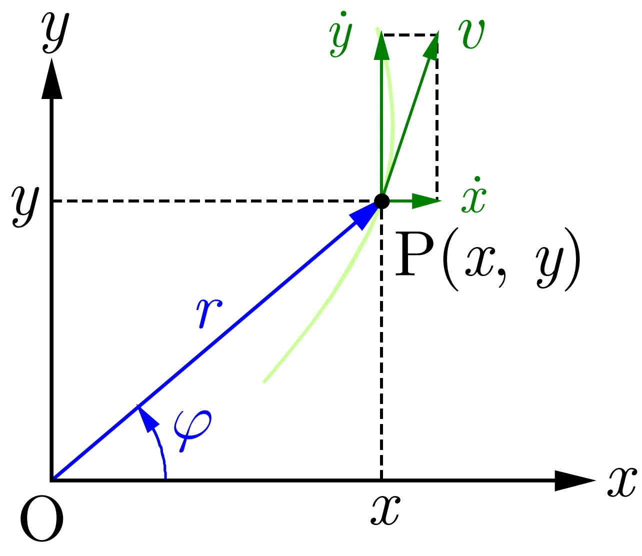
2. 運動方程式をたてる（極座標表示）
   - $(r,\ \varphi)$方向の運動を考える

3. その運動が第２法則に合致することを示す



質点の運動を極座標で表す

- 中心力を受ける
  質点 P の運動を考える



  - P の位置：$(x,\ y) = (r,\ \varphi)$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

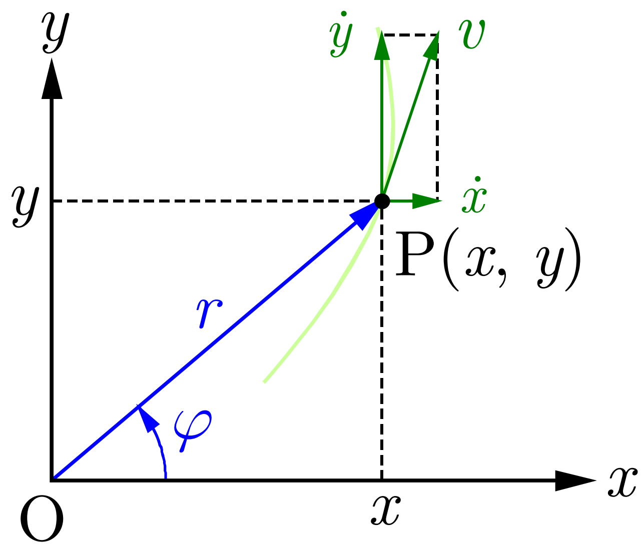
  - P の速度 $\boldsymbol{v}$： $(x,\ y)$ 座標では $\boldsymbol{v} = (\dot{x},\ \dot{y})$

- これを極座標 $(r,\ \varphi)$ で表せ
  - 上式を時間微分せよ

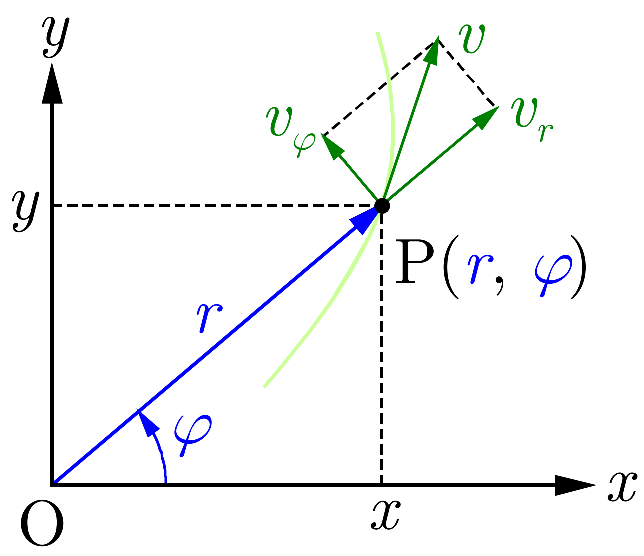
質点の運動を極座標で表す

- P の $(x,\ y)$ 方向速度 $\boldsymbol{v} = (\dot{x},\ \dot{y})$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \end{cases}$$



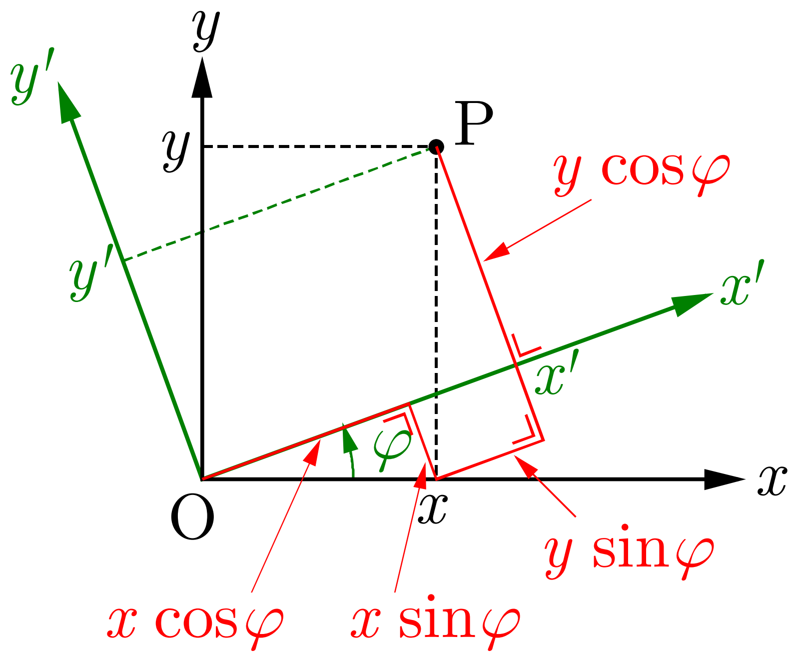
- P の $(r,\ \varphi)$ 方向速度
  $\boldsymbol{v} = (v_r,\ v_\varphi)$ を求めたい
  - v_r ：動径 r 方向速度
  - v_φ ：方位角 φ 方向速度



- 座標変換を考える

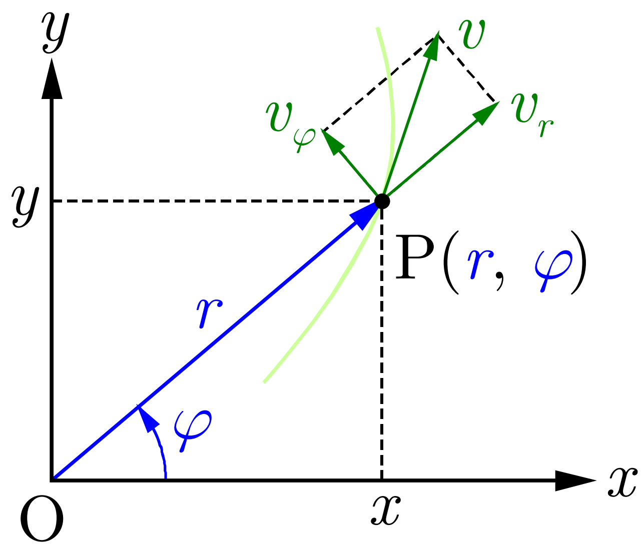
座標変換

- 質点の運動を，
  異なる座標系から見る
  （第14回 相対運動）
  - 座標系S：P$(x,\ y)$
  - 座標系S'：P$(x',\ y')$
    - 原点O：共通
    - 座標系S'は座標系Sに対し
      φだけ傾いている



- $(x',\ y')$を$(x,\ y)$を用いて表すと…
  - $x' = x\cos\varphi + \cdots$

質点の運動を極座標で表す



- P の $(r,\ \varphi)$ 方向速度

  $\boldsymbol{v} = (v_r,\ v_\varphi)$

  $$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

  - 動径r 方向速度v_r ：動径r の微分
  - 方位角φ 方向速度v_φ ：動径r × 角速度 $\dot{\varphi}$

- P の $(r,\ \varphi)$ 方向加速度 $\boldsymbol{a} = (a_r,\ a_\varphi)$ を求めたい
  - $(v_r,\ v_\varphi)$ を時間微分してもダメ

質点の運動を極座標で表す

- $\boldsymbol{a} = (a_r,\ a_\varphi)$ を求めたい

  - P の $(x,\ y)$ 方向速度： $\boldsymbol{v} = (\dot{x},\ \dot{y})$

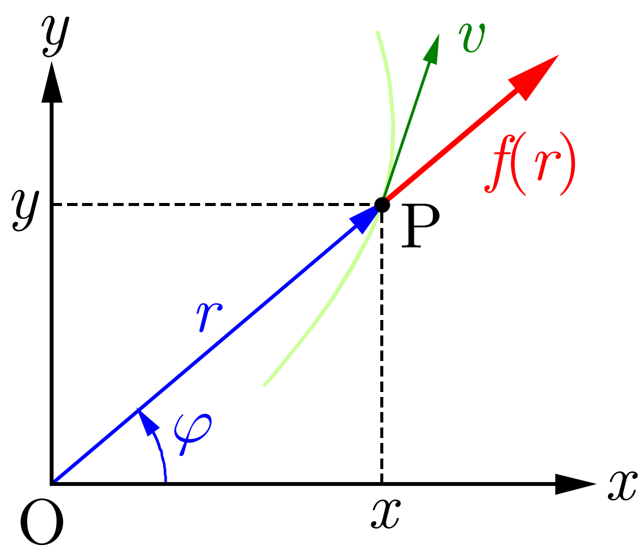
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \end{cases}$$

  - 上式を時間微分し，
    P の $(x,\ y)$ 方向加速度 $\boldsymbol{a} = (\ddot{x},\ \ddot{y})$
    を求めよ

質点の運動を極座標で表す

- P の (r, φ) 方向加速度 $\boldsymbol{a} = (a_r, a_\varphi)$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{cases}$$

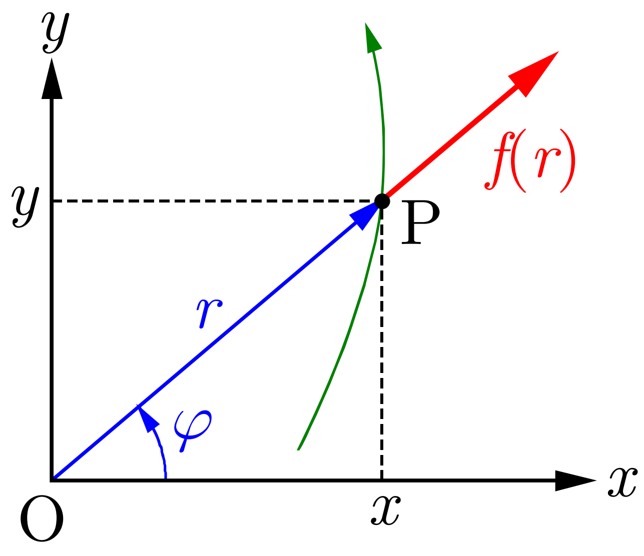


- P の (r, φ) 方向の運動方程式をたてよ
  - P の質量：m
  - 動径 r 方向：中心力 $f(r)$ が作用
  - 方位角 φ 方向：外力なし

中心力を受ける質点の運動方程式

- 極座標による運動方程式

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = f(r) \\ m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0 \end{cases}$$



  - 第１式：動径 r 方向の運動方程式
  - 第２式：方位角 φ 方向の運動方程式

- 続きは次回

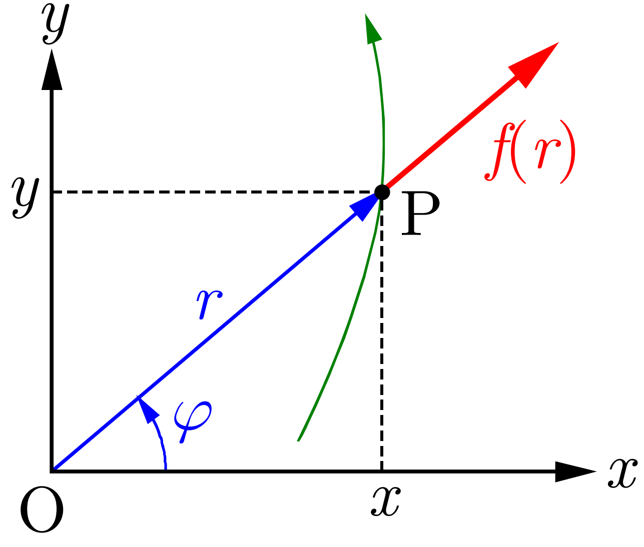
第8回の内容

- 惑星の運動
  - 第２法則：面積の定理（続き）
    - 太陽の引力（中心力）を受ける惑星について運動方程式を導く ⇨ 極座標表示
    - その運動が第２法則に合致することを示す
  - 第３法則：公転周期
    - ケプラーの法則にしたがう惑星の運動から，太陽の引力が持つ特性を明らかにする
    - その特性から，万有引力の法則を導く

中心力を受ける質点の運動方程式

● 極座標による運動方程式

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = f(r) \\ m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0 \end{cases}$$



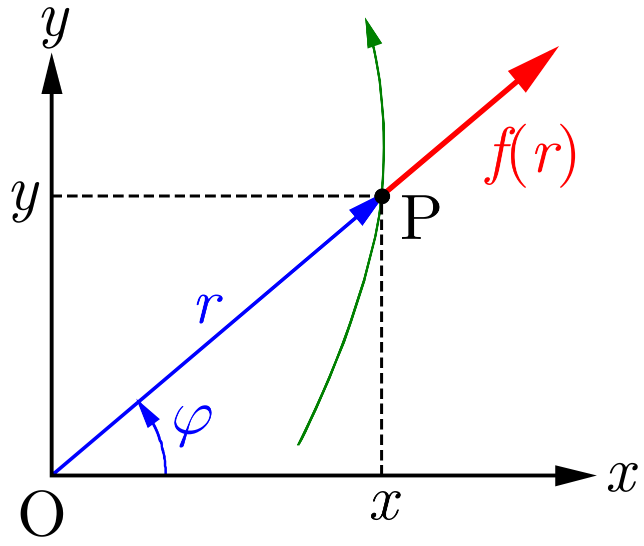
● 第１式：動径 r 方向の運動方程式

- 変形すると　$m\ddot{r} = f(r) + mr\dot{\varphi}^2$
- 外力として，中心力と遠心力を受ける質点の運動
- 遠心力 $= mr\dot{\varphi}^2 = m\dfrac{{v_\varphi}^2}{r} \quad \left(v_\varphi = r\dot{\varphi}\right)$

中心力を受ける質点の運動方程式

- 極座標による運動方程式

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = f(r) \\ m\underline{\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)} = 0 \end{cases}$$



- 第２式：方位角 φ 方向の運動方程式
  - 外力はゼロ
  - 第２式は次のようにも書ける

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = r\underline{\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)} = 0$$

中心力を受ける質点の運動方程式

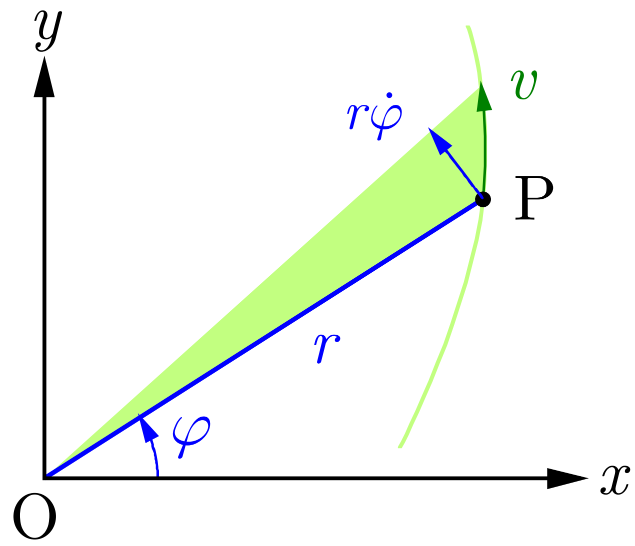
- 第２式は次のようにも書ける

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

  - 時間について積分すれば

$$r^2\dot{\varphi} = r \cdot r\dot{\varphi} = h \quad（一定）$$

⇩

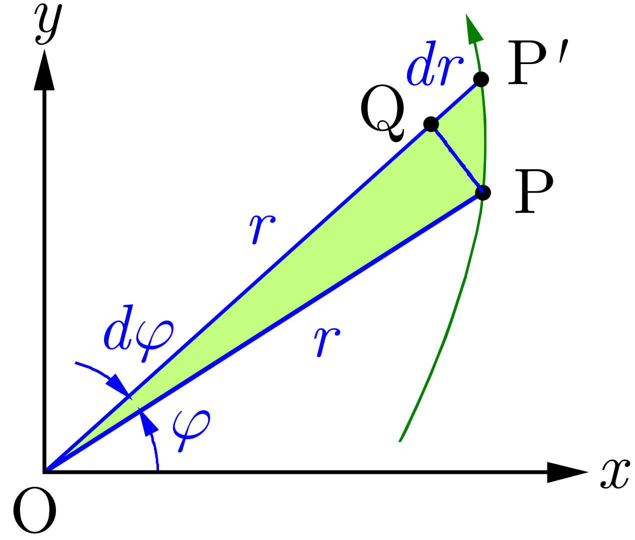


- 面積の定理：中心力作用時の面積速度は一定
  - ケプラーの第２法則
  - 惑星だけでなく，中心力を受ける物体なら何でも

面積の定理

- 面積速度：動径 OP が
  単位時間に掃過する面積
  - 面積POP$'$ を dt で割ると

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$$
$$= \frac{1}{2}h \quad （一定）$$

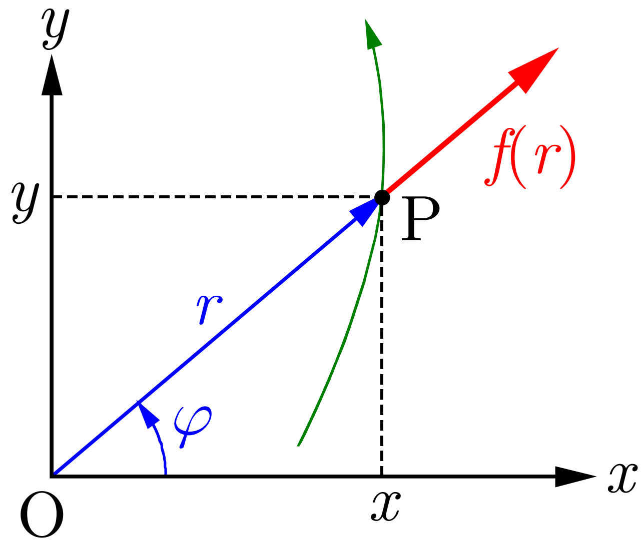


- 面積の定理：
  - １つの質点が
    固定点から中心力の作用を受けて運動するとき,
    力の中心のまわりの面積速度は一定である

中心力を受ける質点の運動方程式

- 極座標による運動方程式

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = f(r) \\ m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0 \end{cases}$$

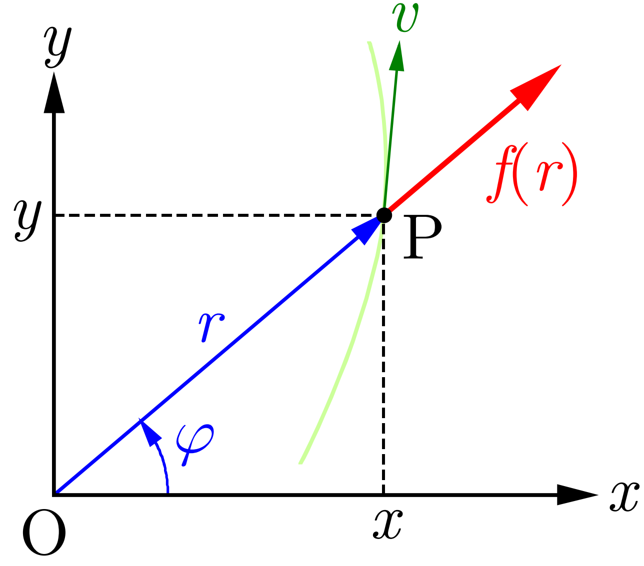


- 第２式より　$r^2\dot{\varphi} = h$（一定）
  - 面積の定理　：面積速度は一定
  - ケプラーの第２法則

- この式と第１式より，φを消去すると…

余談:中心力のエネルギー

- 質点 P の運動エネルギー
  - $K = \frac{1}{2}mv^2$



- 極座標$(r,\ \varphi)$を使って表せ
  - P の速度

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

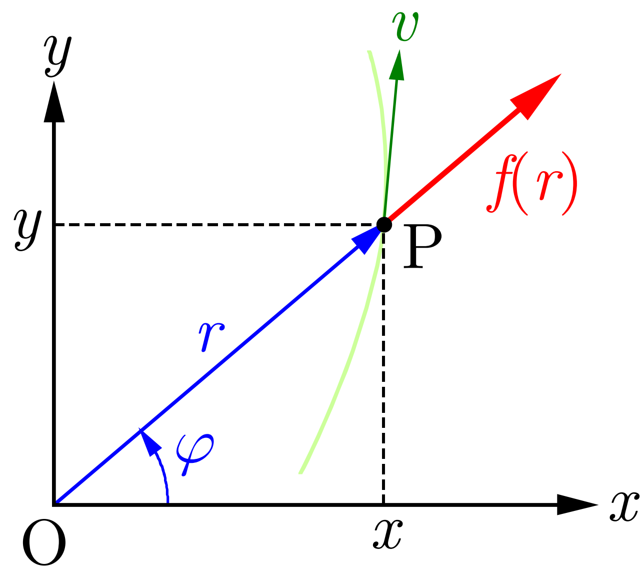
であるから…

中心力の位置エネルギー

- 中心力 $f(r)$ が
  ある関数 $U(r)$ から

$$f(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$$

  によって導かれるとき



- $U(r)$ を中心力 $f(r)$ の位置エネルギー,
  あるいは ポテンシャルという
  - 中心力 $f(r)$ は保存力でもある

ケプラーの法則(1609-1619)

- 天体観測結果から帰納的に導き出されたもの
  - なぜ成り立つのか，理論的裏付けがなかった

- ニュートン（「プリンキピア」1687）
  - 運動の法則
  - 万有引力の法則

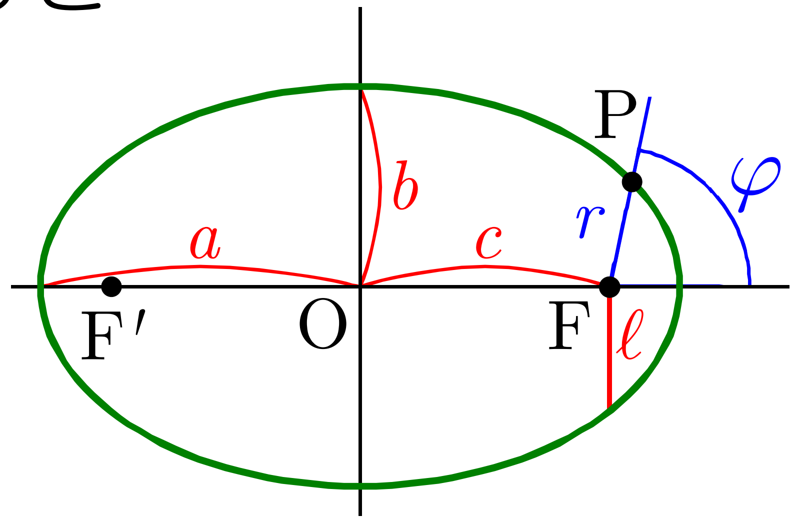
  により説明できることを明らかにした

  - ケプラーの法則にしたがう惑星の運動から，太陽の引力が持つ特性を明らかにする
  - その特性から，万有引力の法則を導く

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- ケプラーの第１法則：楕円軌道より
  惑星の位置を極座標で表すと

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi$$



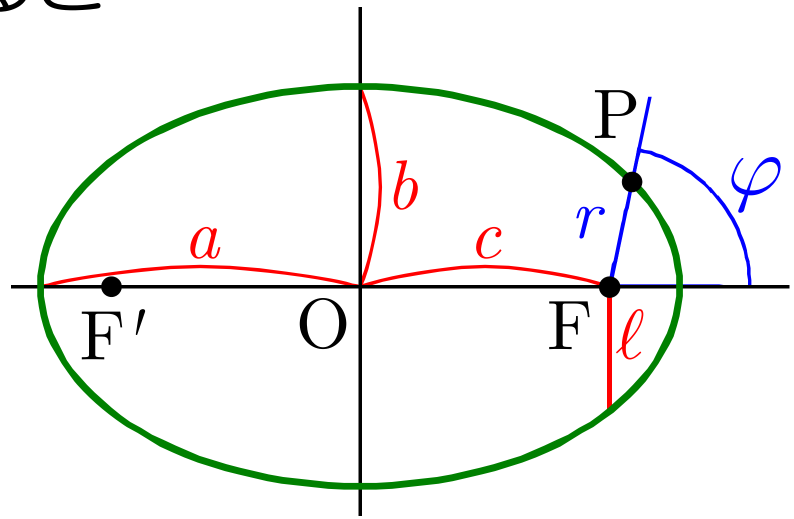
  - 半直弦　$\ell = \dfrac{b^2}{a}$
  - 離心率　$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$
  - 長軸半径a，短軸半径b，焦点と原点の距離c

- この式を時間で微分すると…

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- ケプラーの第１法則：楕円軌道より
  惑星の位置を時間微分すると

$$\ell \frac{\dot{r}}{r^2} = \varepsilon \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$



- ケプラーの第２法則：
  面積の定理より

$r^2\dot{\varphi} = h$ が定数なので

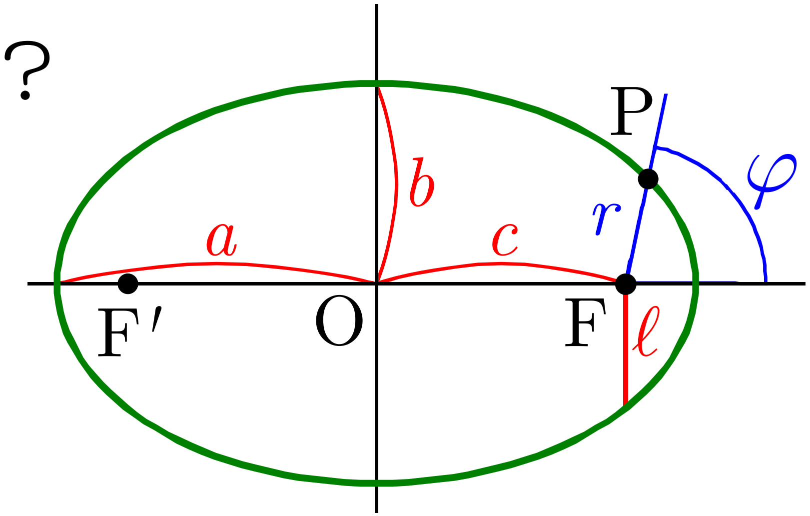
$$\dot{r} = \frac{h}{\ell}\varepsilon \sin\varphi$$

- さらに時間で微分すると…

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- ケプラーの第１，２法則にしたがう
  惑星が受ける力の特徴を３点挙げよ
  - この式から何が分かるか？

$$f(r) = -\frac{mh^2}{\ell r^2}$$



1. 符号が負：
   焦点（F）方向の力 ＝ 引力である
2. 太陽からの距離 r の２乗に反比例する
3. 惑星の質量 m に比例する

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- 第１，２法則にしたがう惑星が受ける力

$$f(r) = -\frac{mh^2}{\ell r^2}$$

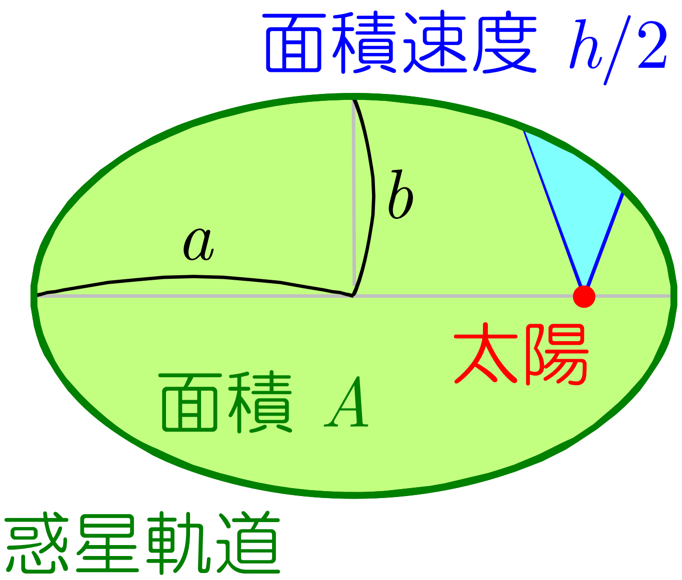
  - 惑星質量 m，面積速度 h，半直弦 ℓ に依存
    - ・惑星ごとに異なる

- 太陽の引力はもっと普遍的な力ではないのか？
  - ケプラーの第３法則を考えてみる

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- ケプラーの第３法則
  - 惑星が太陽のまわりを回る周期 T の２乗は楕円軌道の長半径 a の３乗に比例する

$$\frac{T^2}{a^3} = C \quad \text{（一定）}$$



- 一方，
  - 惑星軌道が囲む面積 A
  - 面積速度 $h/2$

  を使って T を表すと…

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- 惑星が太陽から受ける力はどのように表せるか

$$f(r) = -\frac{mh^2}{\ell r^2} = -\frac{4\pi^2 m}{C r^2}$$

- またそれは何を意味するか

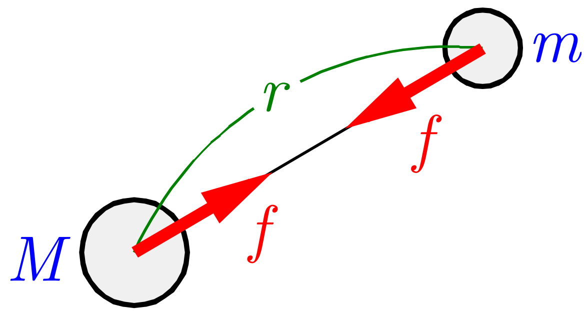
1. 惑星の質量 m に比例する
2. 太陽からの距離 r の２乗に反比例する

- 面積速度など，その他の影響は一切受けない
  - シンプル ＝ 普遍性の高い法則性

ケプラーの法則から太陽の引力を導く

- 惑星が太陽から受ける力

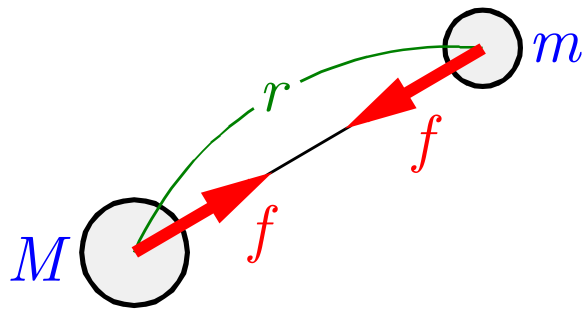
$$f(r) = -\frac{4\pi^2 m}{Cr^2}$$ ：惑星の質量 m に比例



- 作用・反作用の法則
  - ⇨ 太陽は惑星から引力を受ける
- m に比例するのなら，力の源は質量であろう
  - ⇨ 太陽の質量 M にも比例するはず
  - ⇨ 質量を持つすべての物体に同様の力が働くだろう

万有引力の法則

- すべての物体の間には質量による引力が働く．
  その大きさは，物体の質量（の積）に比例し，
  距離の２乗に反比例する



$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$

  - G：万有引力定数

$$G = 6.672 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$$

- 万有引力のポテンシャル

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} f(r)dr = -G\frac{mM}{r}$$

第9回の内容

- 角運動量
  - 回転運動
  - 角運動量と力のモーメント
  - 内積と外積
  - 角運動量保存の法則

※今後の授業：回転できる物体を扱う

- 角運動量：回転に関する物理量
- 今回は，質点の運動を角運動量から考えてみる

後半の授業：専門への橋渡し

- 惑星の運動
  - ケプラーの法則
  - 中心力を受ける物体の運動 ⇨ 面積の原理
- 質点系の力学：質点の集まり
- 剛体の運動：変形しない物体
  - 極慣性モーメント
- 相対運動
  - 慣性系と運動座標系 ⇨ コリオリカ

- 角運動量

⇩

面積の原理

⇩

回転運動する物体

力学で扱う物体

- 高校の物理　　　　理想的な物体
  - 質点：質量をもつが，大きさは持たない物体
- この授業
  - 質点系：質点の集まり（質点２つ以上）
  - 剛体：大きさをもち，変形しない物体
- 大学の力学　　　　現実的な物体
  - 弾性体，流体：変形する物体

力学で扱う物体

- さまざまな物体
  - 質点：質量をもつが，大きさは持たない物体
  - 質点系：質点の集まり（質点２つ以上）
  - 剛体：大きさをもち，変形しない物体
  - 弾性体，流体：変形する物体

- 物理法則は共通
  - どの物体にも同じように作用する

大きさのある物体

- 質点系：質点の集まり（質点２つ以上）
- 剛体：質量と大きさをもち，変形しない物体
- 弾性体：変形する物体

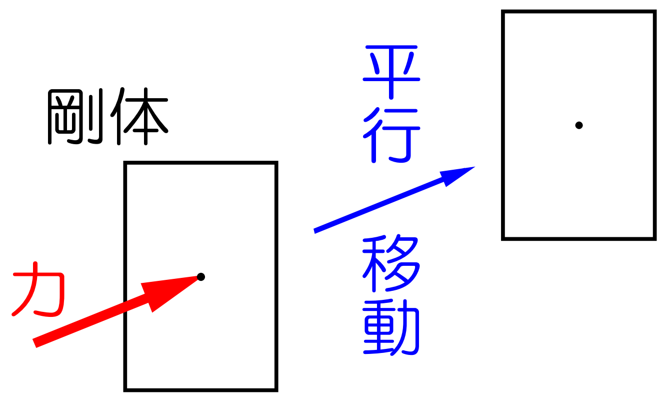
- これらの物体でも，力のつり合いは成立する
  - 質点と同様
  - 全体でも，どのような部分をとりだしても

- 大きさがある ⇨ 回転ができる

大きさのある物体の運動

- 例えば，宇宙空間に浮かぶ剛体に力を加える
  - 重心に作用

    ⇨ 平行移動

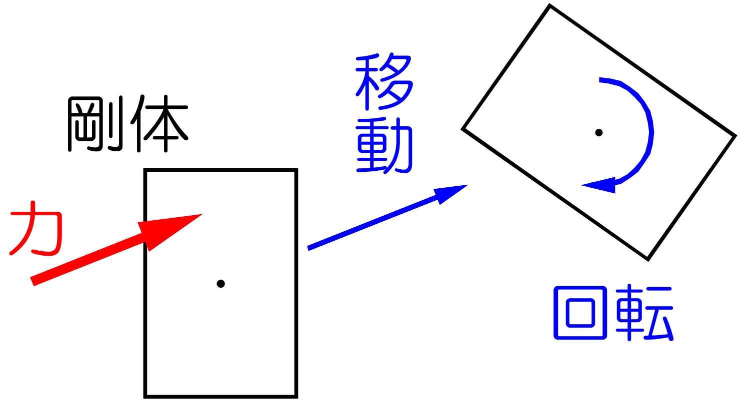


  - 重心を外した力

    ⇨ 回転しながら移動

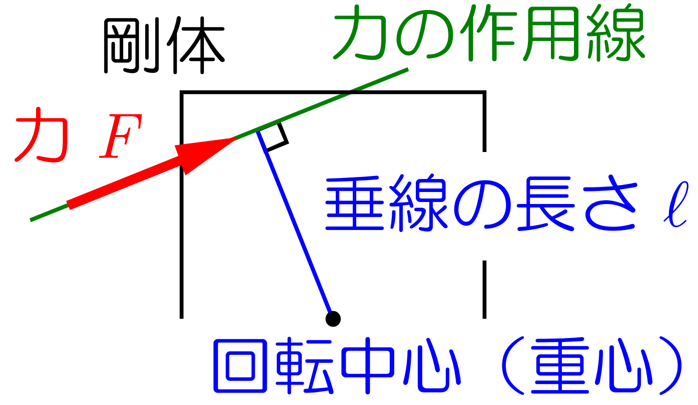
  - 回転させようとする力：

    「モーメント」と呼ぶ



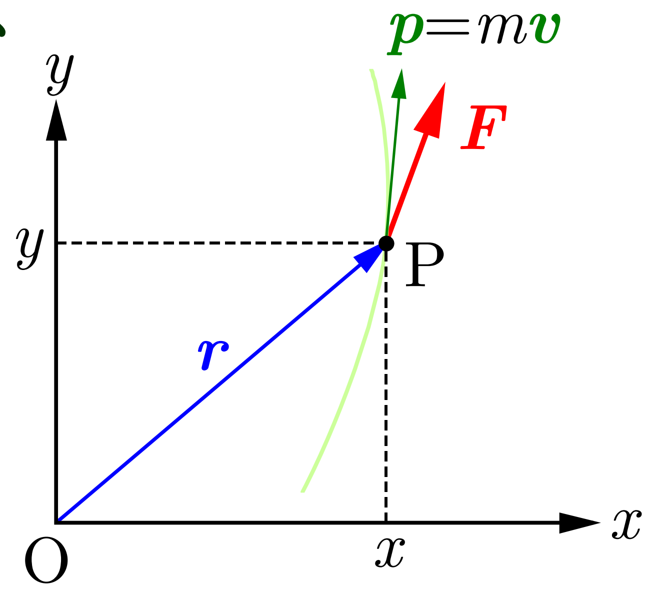
力のモーメント

- モーメント ＝ 力 F × 腕の長さ ℓ
  - 腕：回転中心から力の作用線に降ろした垂線
- 回転させせようとする作用
  - 力 F に比例
  - 腕の長さ ℓ に比例
    - ・てこの原理



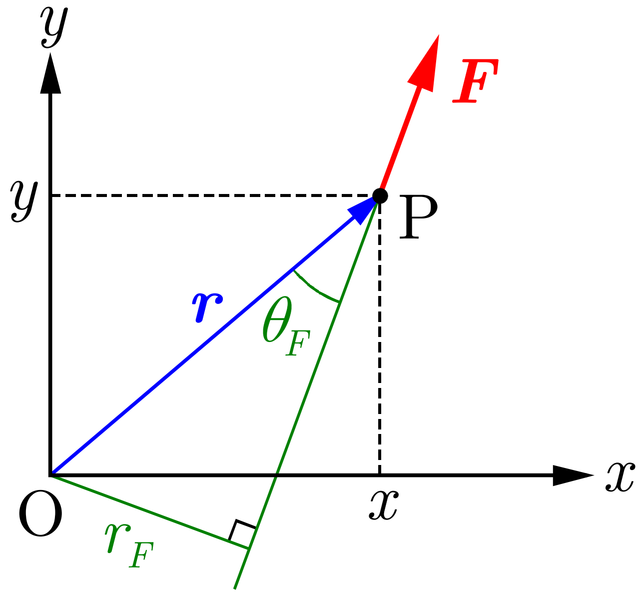
- モーメント：力×長さの次元［ML^2T^{-2}］
  - 力ベクトルと作用点の位置ベクトルの外積

角運動量と力のモーメント



- 質点P のxy 平面上の運動
  - 位置：$\boldsymbol{r} = (x,\ y)$
  - 運動量：$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
  - 作用する力：$\boldsymbol{F}$
    - ・大きさ：　$r = |\boldsymbol{r}|,\quad v = |\boldsymbol{v}|,\quad F = \left|\boldsymbol{F}\right|$
- 第２法則より　$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$
  - 単なる質点として取り扱うことはできる
- 原点O の周りを回る回転運動として考えてみる

力のモーメント

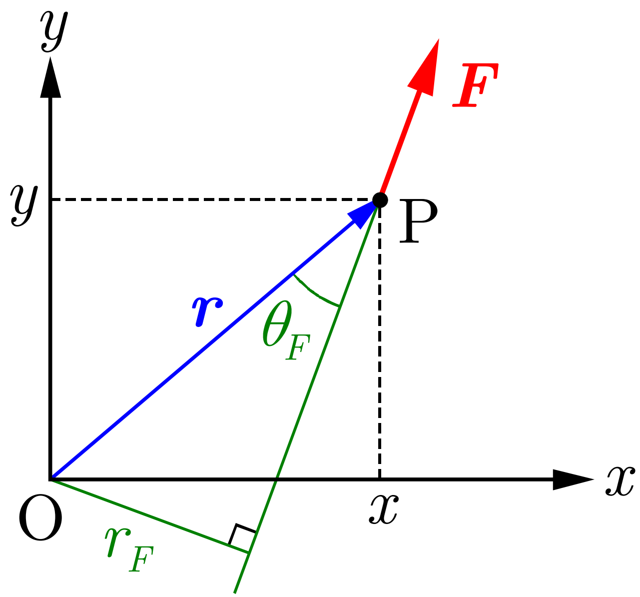


- 質点P には
  力$\boldsymbol{F}$ が作用している
  - 質点P の位置：$\boldsymbol{r} = (x,\ y)$
  - $\boldsymbol{F}$ と$\boldsymbol{r}$ の角度：θ_F

- 原点O に関する（原点Oを中心とする）
  力$\boldsymbol{F}$ のモーメントを求めよ
  - 腕の長さは？
  - モーメントの大きさと向きは？

力のモーメント

- モーメント ＝ 力 × 腕の長さ
  - 腕：回転中心から力の作用線に降ろした垂線
  - 腕の長さ： $r_F = r\sin\theta_F$

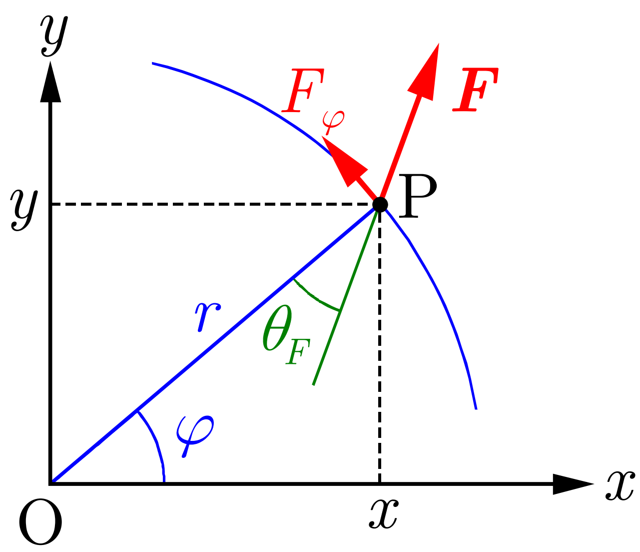


- 原点O に関する力$\boldsymbol{F}$ のモーメント
  - 大きさ： $N = F\cdot r_F$
    $= rF\sin\theta_F$
  - 向き：反時計回り

力のモーメント

- 極座標で考えると
  - モーメント ＝ 力のφ方向成分 × 動径r
  - 力のφ方向成分

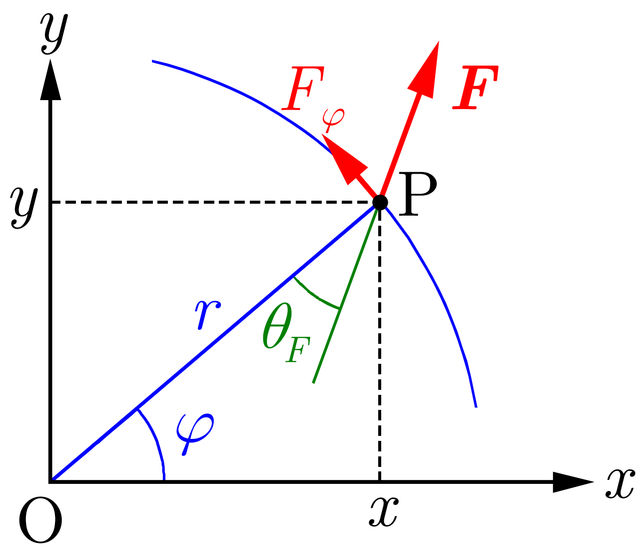
$$F_\varphi = F \sin \theta_F$$



- 原点O に関する
  力$\boldsymbol{F}$ のモーメント

$$N = F_\varphi \cdot r$$
$$= rF \sin \theta_F$$

力のモーメント



- 原点O に関する力$\boldsymbol{F}$ のモーメント
  - 外積（クロス積）を使って

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

  ・大きさ： $N = rF\sin\theta_F$

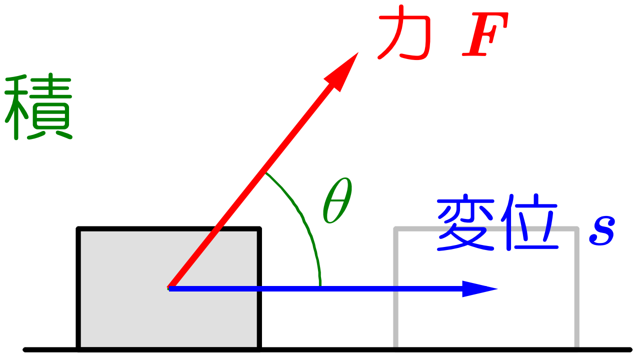
- 作用点の位置ベクトルと力ベクトルの外積
- 力×長さの次元［ML^{2}T^{-2}］をもつ

※ 仕事 ＝ 力ベクトルと変位ベクトルの内積

内積と外積

- 仕事 ＝ 力と変位（移動量）の内積
  - 床の摩擦に逆らって物体を移動

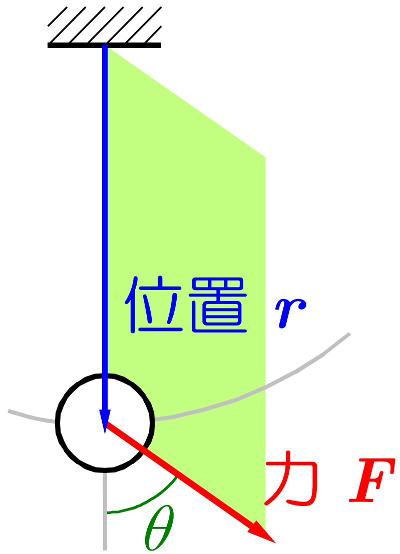
$$W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}} = F s \cos\theta$$



  - ・移動方向に力をかけるのがよい

- モーメント ＝ 力と位置の外積
  - 重いふり子を振り上げる

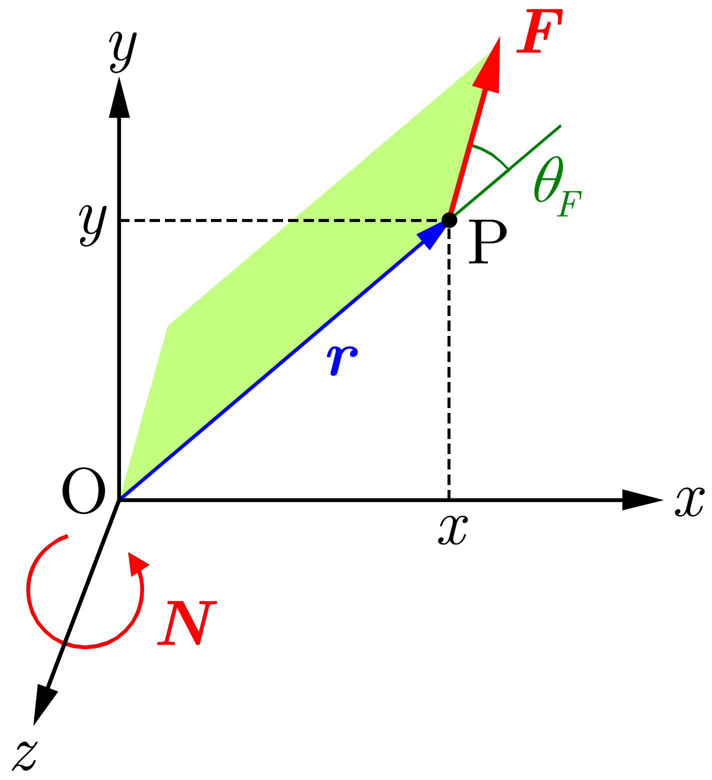
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}, \quad N = r \times F \sin\theta$$



  - ・ $\boldsymbol{r}$ に対して直角に力をかけるとよい

外積：ベクトル量

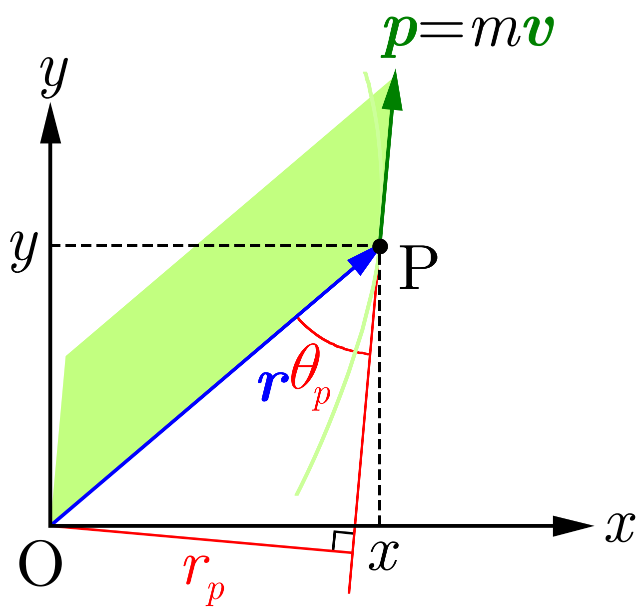
- 原点O に関する力$\boldsymbol{F}$ のモーメント
  - $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
  - 大きさ：$N = rF \sin\theta$
    - 平行四辺形の面積



- $\boldsymbol{N}$ の向きは？
  - $\boldsymbol{r}$ と$\boldsymbol{F}$ がなす平面（xy 平面）に直角な方向 ＝ z 軸方向
  - $\boldsymbol{N}$ ：z 軸まわりの回転を表す

角運動量

- 原点O に関する（原点Oを中心とする）運動量$\boldsymbol{p}$ のモーメント

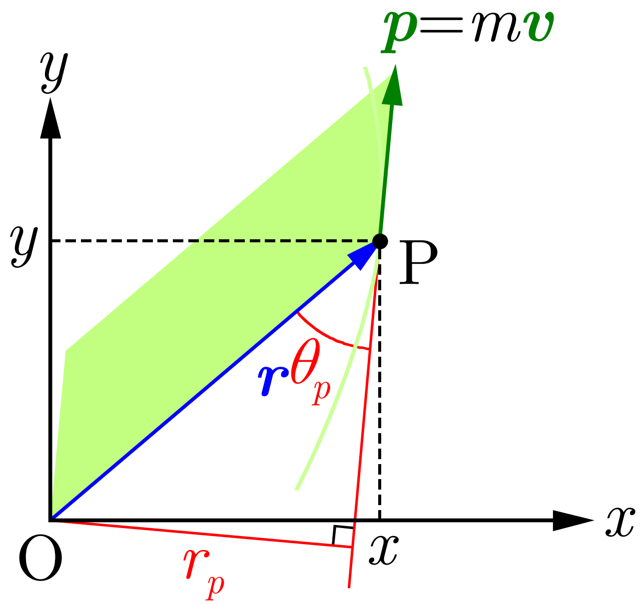


$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

- これを角運動量とよぶ
  - 質点の位置ベクトルと運動量ベクトルの外積
  - 運動量×長さの次元［ML^{2}T^{-1}］をもつ

角運動量

- 角運動量 ＝ 運動量 × 腕の長さ
  - 腕：回転中心から運動量ベクトルに降ろした垂線
  - 質点P の運動量：$\boldsymbol{p}$
  - $\boldsymbol{p}$ の大きさ：　$p = |\boldsymbol{p}|$
  - $\boldsymbol{p}$ と$\boldsymbol{r}$ の角度：θ_p



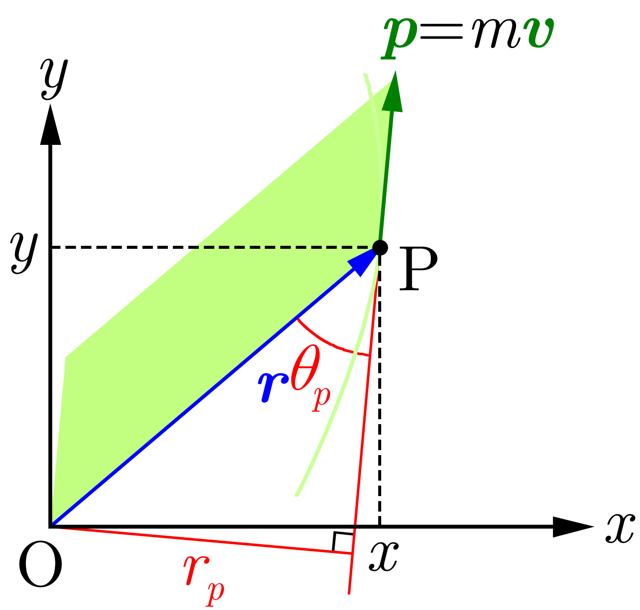
- 質点P の角運動量$\boldsymbol{L}$ を求めよ
  - 角運動量の大きさL と向きは？

角運動量

- 角運動量 ＝ 運動量 × 腕の長さ
  - 腕：回転中心から運動量ベクトルに降ろした垂線
  - 腕の長さ： $r_p = r \sin\theta_p$

- 質点P の角運動量
  - 大きさ： $L = r_p \cdot p$

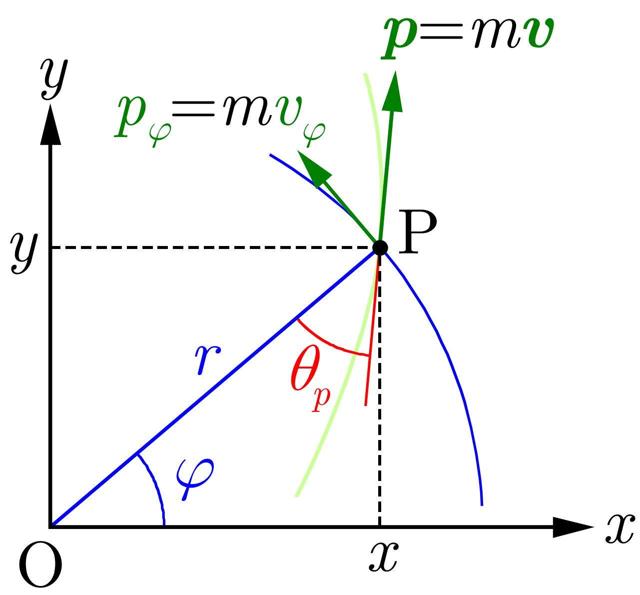
    $= rp \sin\theta_p$
  - 向き：反時計回り



角運動量

- 極座標で考えると
  - 角運動量 ＝ 運動量のφ方向成分 × 動径r
  - 原点O に関する質点P の角運動量

$$L = p_{\varphi} \cdot r = rp\sin\theta_p$$



- P の $(r,\ \varphi)$ 方向速度

$$\boldsymbol{v} = (v_r, v_{\varphi}) = (\dot{r}, r\dot{\varphi})$$

- これを使って質点P の角運動量を表せ

角運動量

- 極座標で考えると
  - 角運動量 ＝ 運動量のφ方向成分 × 動径r

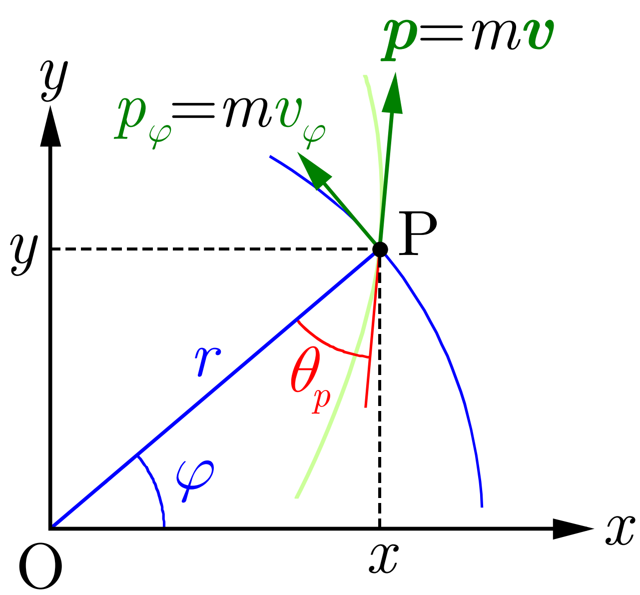
    ＝ 質量m × φ方向速度v_φ × 動径r

- 原点O に関する
  質点P の角運動量

$$L = mv_\varphi r$$

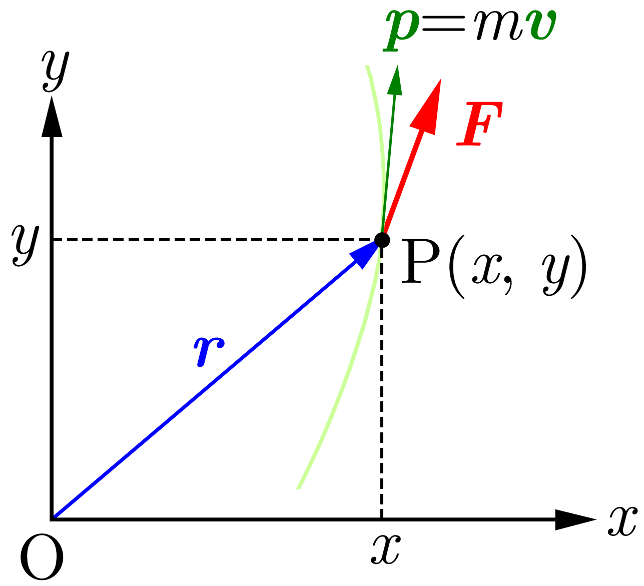
$$= m \cdot r\dot{\varphi} \cdot r$$

$$= mr^2\dot{\varphi}$$



角運動量と力のモーメントの関係

- 質点P のxy 平面上の運動
  - 位置：$\boldsymbol{r} = (x,\ y)$
  - 速度：$\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y})$
  - 作用する力：$\boldsymbol{F} = (F_x,\ F_y)$



- 第２法則 $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ より

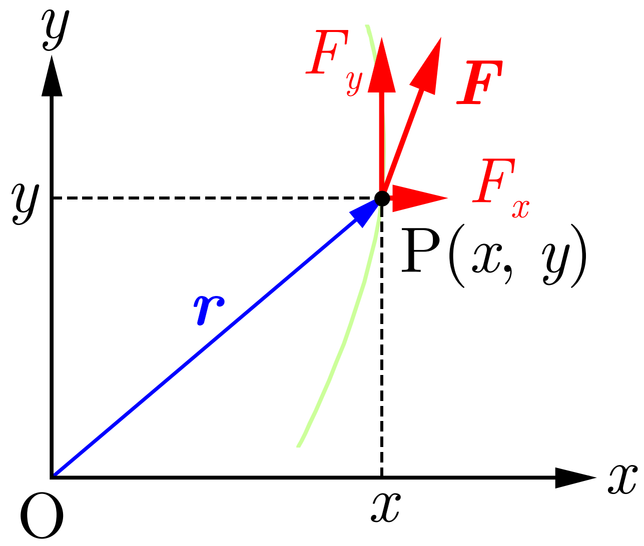
$(x,\ y)$方向の運動方程式をたてよ

  - 回転しない物体としての取り扱い

角運動量と力のモーメントの関係

- $(x,\ y)$ 方向の運動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = F_x \\ \dfrac{dp_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y} = F_y \end{cases}$$



- 原点O に関する力$\boldsymbol{F}$ のモーメント$\boldsymbol{N}$ を
  - 位置：$\boldsymbol{r} = (x,\ y)$
  - 力：$\boldsymbol{F} = (F_x,\ F_y)$

  を使って表せ（反時計回り正）

角運動量と力のモーメントの関係

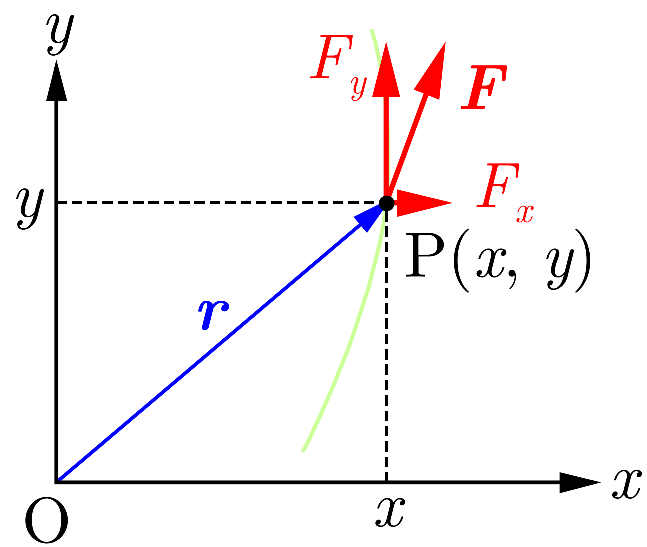
- 原点O に関する
  力$\boldsymbol{F}$ のモーメント$\boldsymbol{N}$
  （反時計回り正）

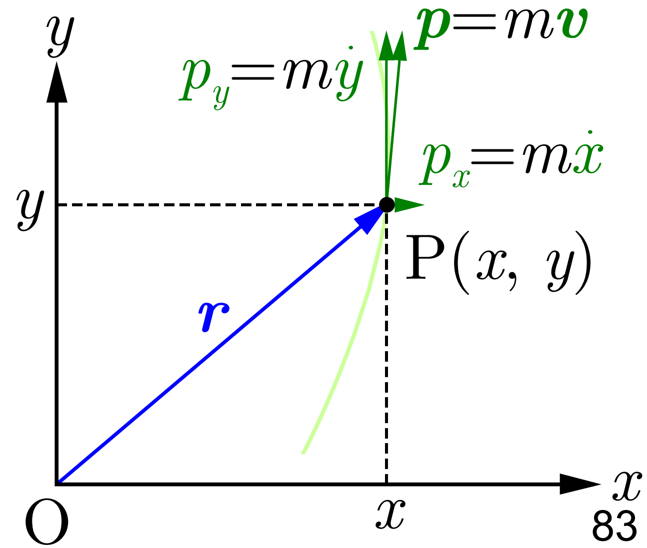
$$N = -F_x \cdot y + F_y \cdot x$$

$$= xF_y - yF_x$$

- 質点P の角運動量$\boldsymbol{L}$ を
  - 位置：$\boldsymbol{r} = (x,\ y)$：
  - 運動量：　$\boldsymbol{p} = (m\dot{x}, m\dot{y})$

  を使って表せ





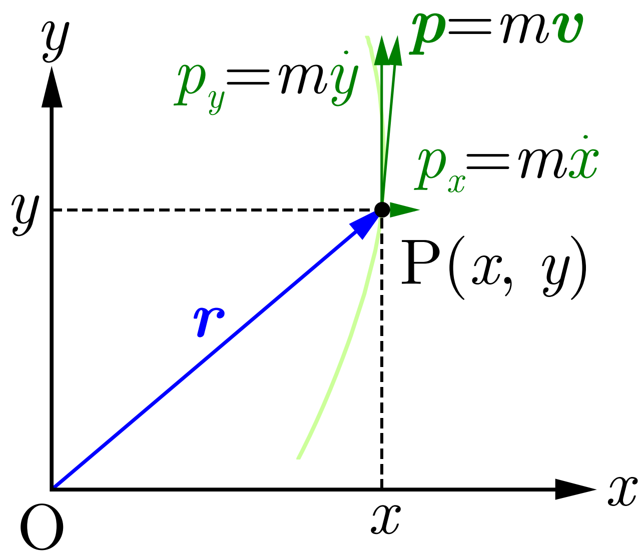
角運動量と力のモーメントの関係

- 質点P の角運動量$\boldsymbol{L}$
  （反時計回り正）

$$L = -p_x \cdot y + p_y \cdot x$$

$$= -m\dot{x} \cdot y + m\dot{y} \cdot x$$

$$= m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)$$



- これを時間微分せよ
  - また，その結果に
    運動方程式を代入せよ

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases}$$

角運動量と力のモーメントの関係

- 角運動量の時間的変化の割合は
  力のモーメントに等しい

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

- 第２法則： $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$
  - 運動量，力
    それぞれのモーメント
    （位置ベクトルとの外積）

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \end{cases}$$

角運動量保存の法則

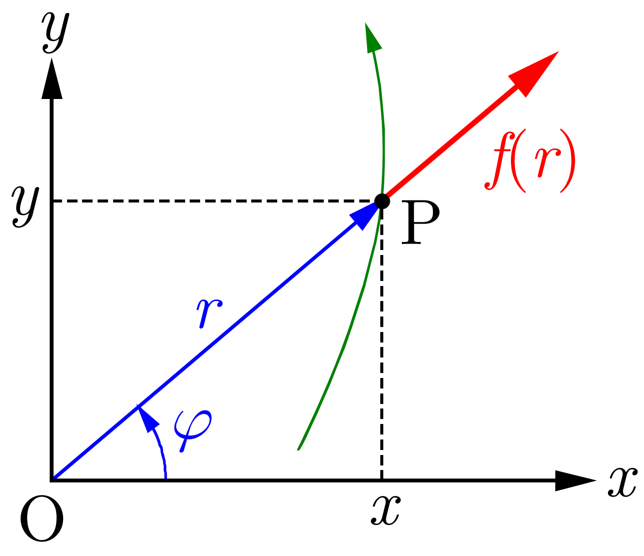
- 角運動量の時間的変化の割合は力のモーメントに等しい　$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$

　　⇩

- 角運動量保存の法則
  - 力のモーメントが作用しないとき角運動量は一定に保たれる

- 中心力を受ける質点を考えてみる
  - 力のモーメントは作用しているか？

角運動量保存の法則



- 運動する質点の角運動量

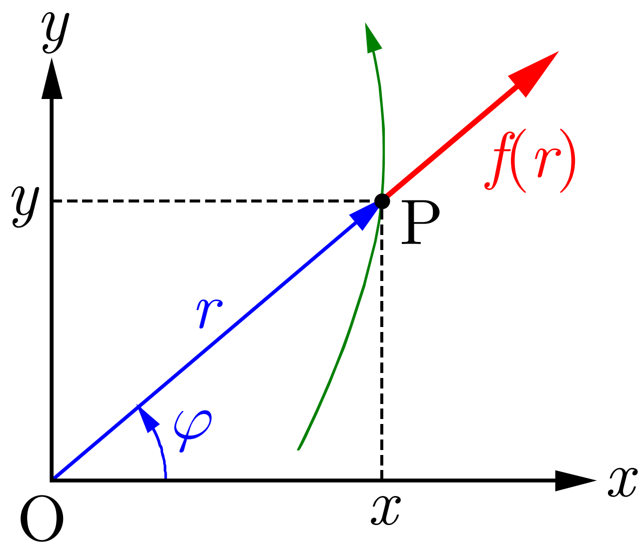
$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

- 中心力を受ける場合：
  - 力のモーメント：$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$
    - 同方向のベクトルの外積はゼロ

- 上記の角運動量から
運動方程式はどのように表されるか？

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

角運動量保存の法則



- 中心力を受ける
  質点の運動方程式

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

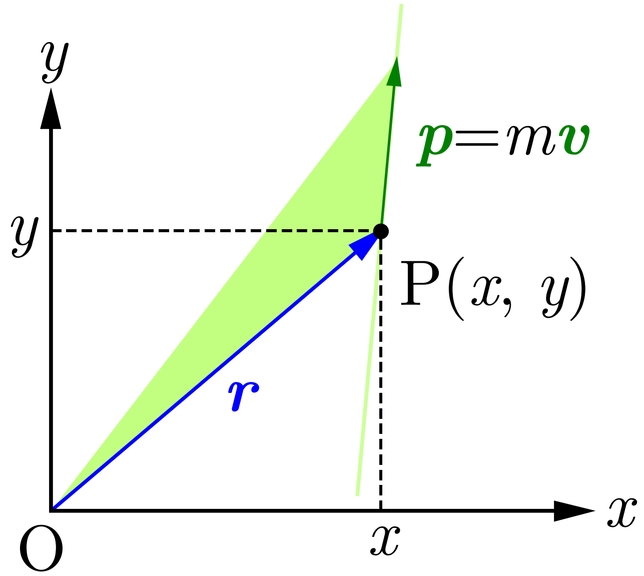
  - 角運動量 $\boldsymbol{L}$ は保存される

- ケプラーの第２法則（面積の定理）とも一致

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\varphi} = h \text{（一定）}$$

角運動量保存の法則

- 力が作用していないとき,
  質点の角運動量が
  任意の位置で保存される
  ことを示せ



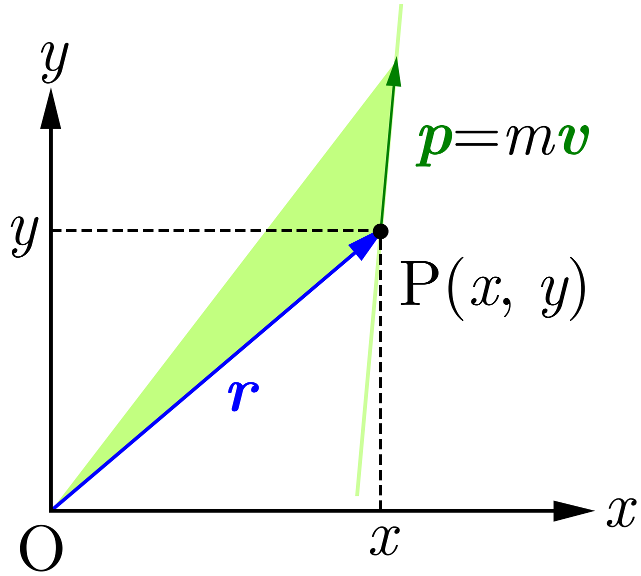
- 作用する力：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$
- 速度$\boldsymbol{v}$，運動量$\boldsymbol{p}$ は？

- 質点の角運動量$\boldsymbol{L}$（面積速度）は
  どのように表現できるか？
  - 図の三角形の面積は何を示すか？

角運動量保存の法則

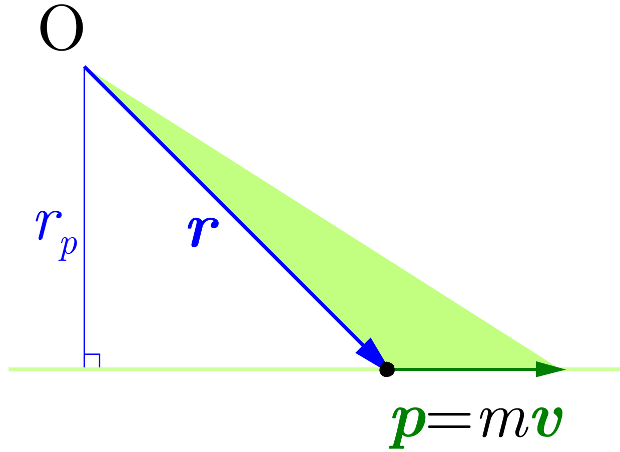
- 力が作用していないとき, 質点の角運動量が任意の位置で保存されることを示せ
  - 作用する力：$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

    ⇨ 等速度運動：$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{p}$ 一定



  - 質点の角運動量$\boldsymbol{L}$
    - 三角形の面積：

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2} p \cdot r_p = \mathrm{const}$$



第10回の内容

- 質点系の力学：今回は角運動量は扱わない
  - 質点系
  - 運動量保存の法則
  - 重心の運動
  - ２体問題

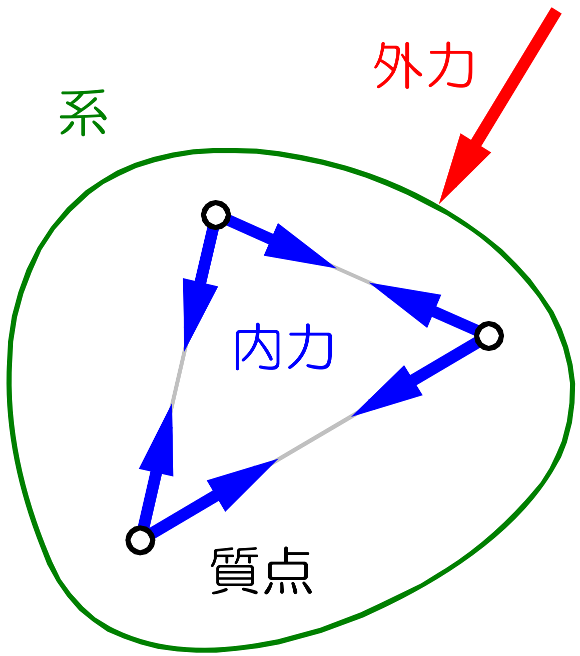
  - 運動エネルギー
  - 角運動量
  - 重心の運動と重心まわりの回転運動（相対運動）

力学で扱う物体

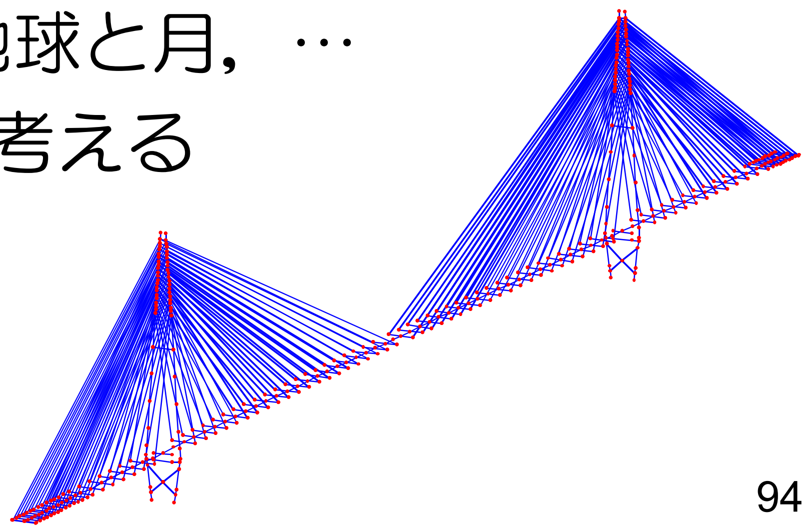
- 高校の物理　　理想的な物体
  - 質点：質量をもつが，大きさは持たない物体
- この授業
  - 質点系：質点の集まり（質点２つ以上）
  - 剛体：大きさをもち，変形しない物体
- 大学の力学　　現実的な物体
  - 弾性体，流体：変形する物体

質点系

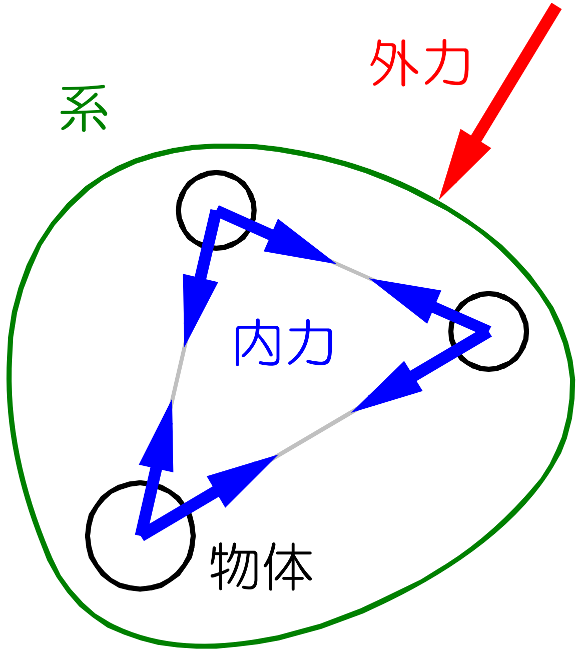
- ２つ以上の質点からなる系
  - ひとかたまりととらえたもの



- たとえば
  - 太陽系：個々の星は質点扱い
  - ２体問題：太陽と惑星，地球と月，…
    - ２つの星を取り出して考える
  - 橋の構造解析モデル
    - 質点とバネからなる

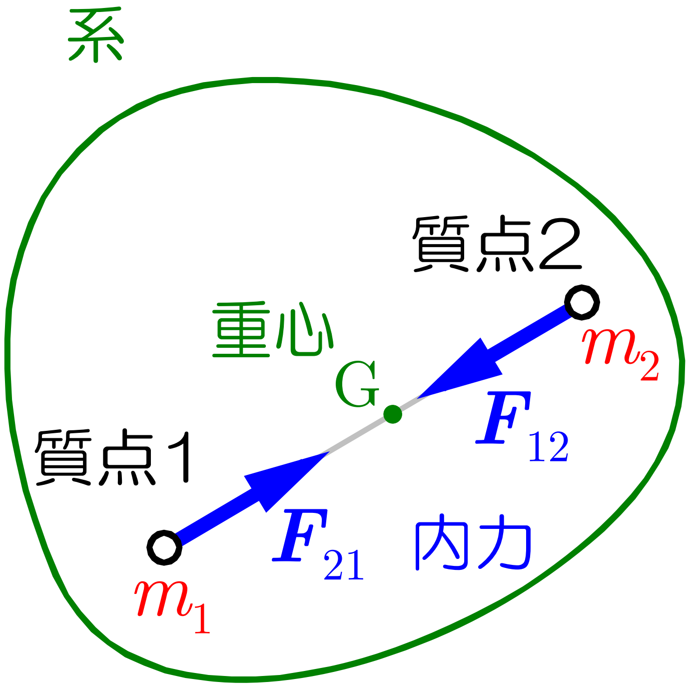


運動量保存の法則



- 複数の物体があっても，全体をひとつの系としてとらえたとき
- 外力（系の外からの力）が作用しなければ
- 系の運動量（物体の運動量の和）は一定
    - 内力（系を構成する物体どうしの力）は作用していてもよい
    - 物体どうし衝突してもよい

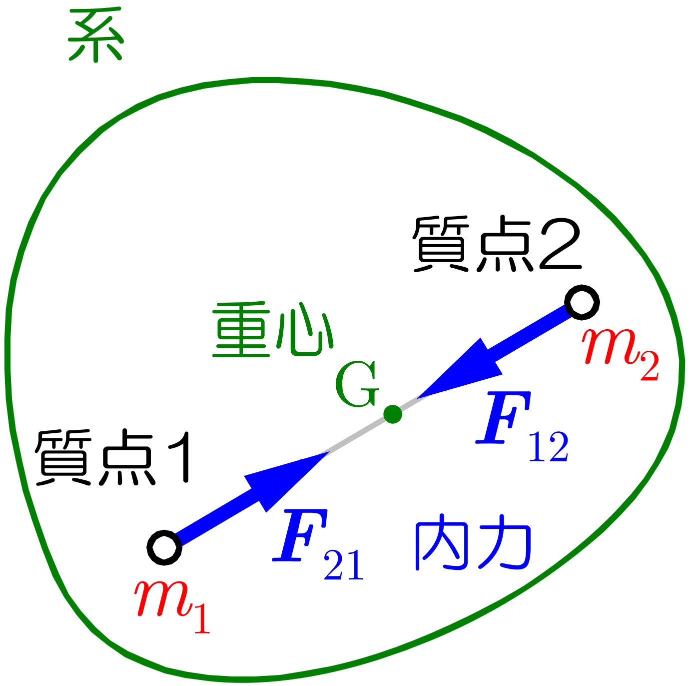
運動量保存の法則



- ２質点系を考える
  - 質点の質量：m_1， m_2
  - 質点の位置：$\boldsymbol{r}_1$， $\boldsymbol{r}_2$
  - 質点どうしの力：$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$
  - 系の外からの力（外力）がないので運動量は一定

- 系の重心G の運動に着目する
  - ２質点の重心位置$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ を求めよ

運動量保存の法則



- 系の重心位置$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$

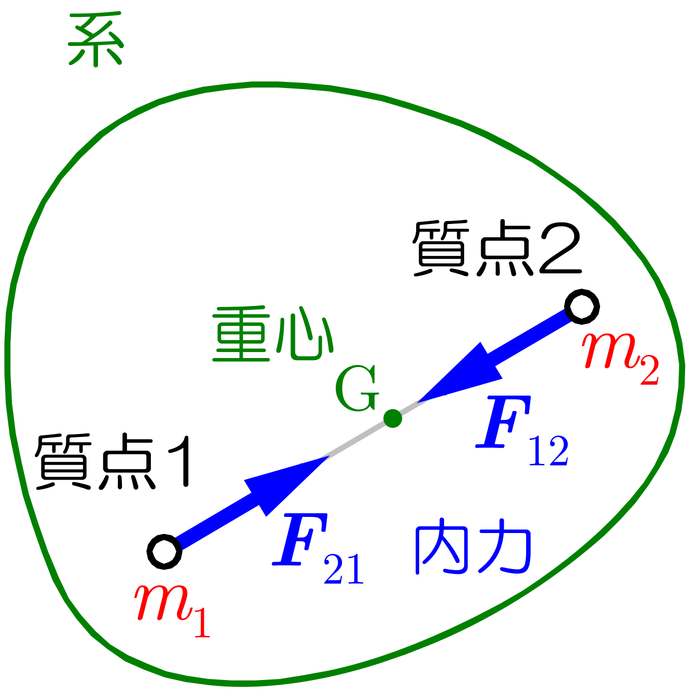
$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

- 質点１，２の運動方程式から
系の重心G の加速度を求めよ

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{21}, \quad m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{12}$$

  - 系の運動量が一定のとき,
重心はどのような運動をするか

運動量保存の法則



- 系の重心 G の加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{12}}{m_1 + m_2}$$

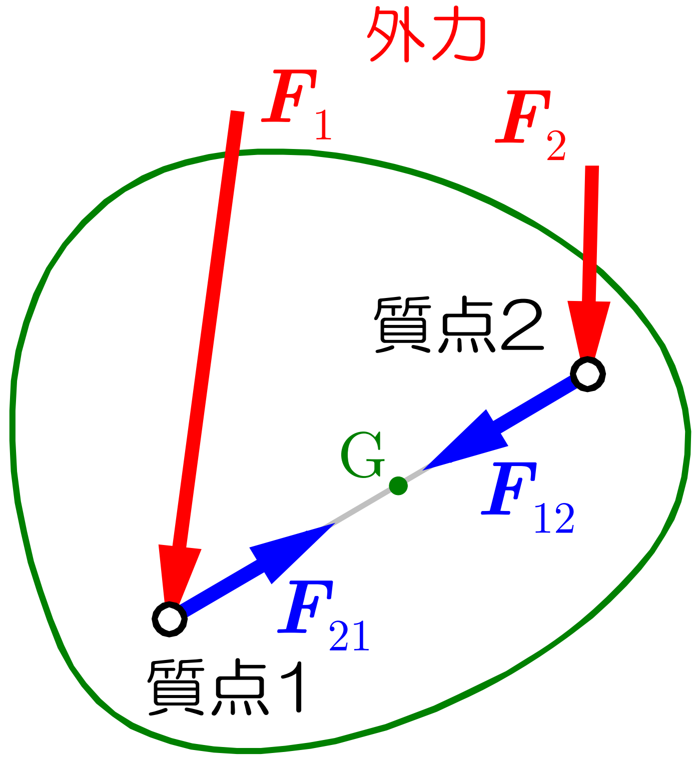
$$= 0$$

  - 内力は，作用・反作用の法則によりキャンセル

- 系の運動量が一定のとき，
  重心は等速度運動する

外力が作用している場合

- 外力：$\boldsymbol{F}_1$,　$\boldsymbol{F}_2$
  - 内力も作用
- 運動量
  - 質点１：　$\boldsymbol{p}_1 = m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1$
  - 質点２：　$\boldsymbol{p}_2 = m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2$
- 第２法則（運動の法則）より
  各質点の運動方程式を求めよ



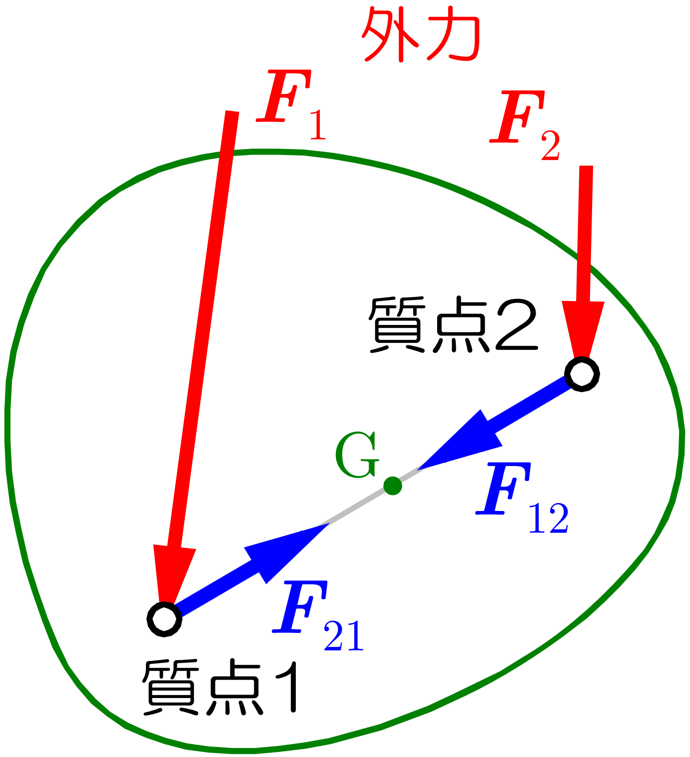
外力が作用している場合

- 第２法則（運動の法則）より各質点の運動方程式を求めよ
  - 質点１：

$$\dot{\boldsymbol{p}}_1 = m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{21}$$

  - 質点２：

$$\dot{\boldsymbol{p}}_2 = m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{12}$$



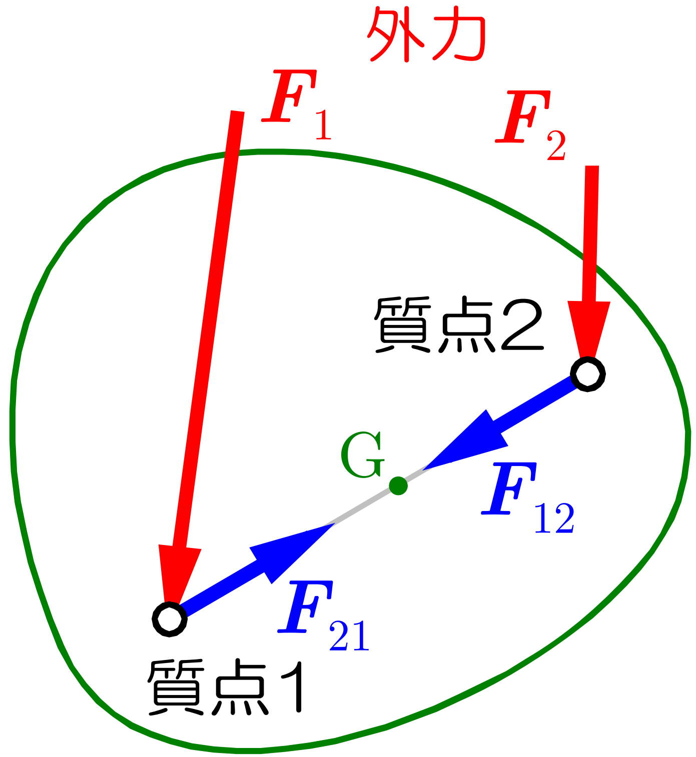
- 系の全運動量 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ を考えたとき,

  $\boldsymbol{P}$ の時間的変化は何と等しくなるか？

外力が作用している場合

- 系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ の時間的変化

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{P}} &= \dot{\boldsymbol{p}}_1 + \dot{\boldsymbol{p}}_2 \\
&= m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 \\
&= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{12} \\
&= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2
\end{aligned}
$$



  - 外力の和に等しい（内力はキャンセル）

- N 個の質点からなる系では…

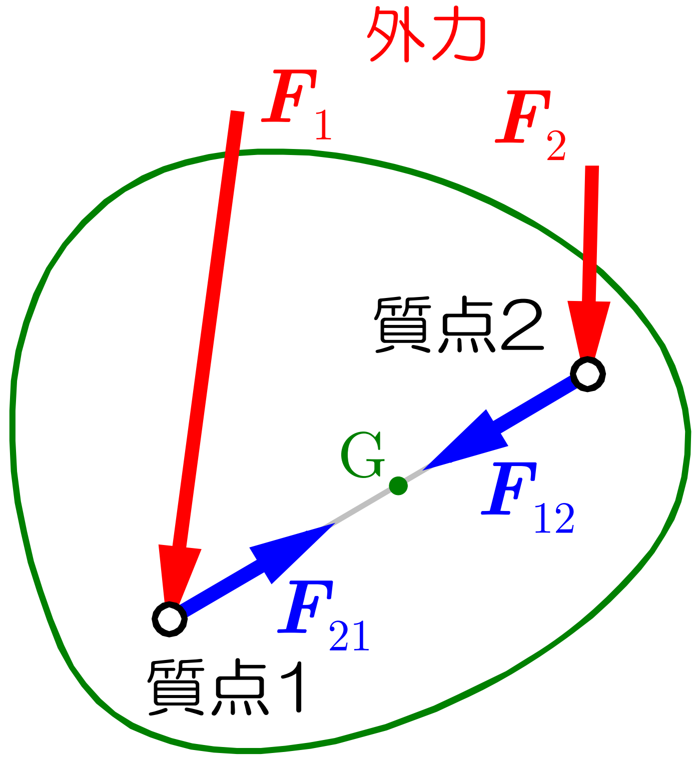
外力が作用している場合

- N 質点系
  - 全運動量：　$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{p}_j$
  - その時間微分：　$\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j$
- 質点系の運動量保存の法則
  - 質点系の全運動量の時間的変化は外力の和に等しい
  - 外力がないとき，全運動量は保存される

系の重心に関する運動方程式

- ２質点系の重心の加速度
  - 外力がないとき

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} &= \frac{m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{\boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{12}}{m_1 + m_2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

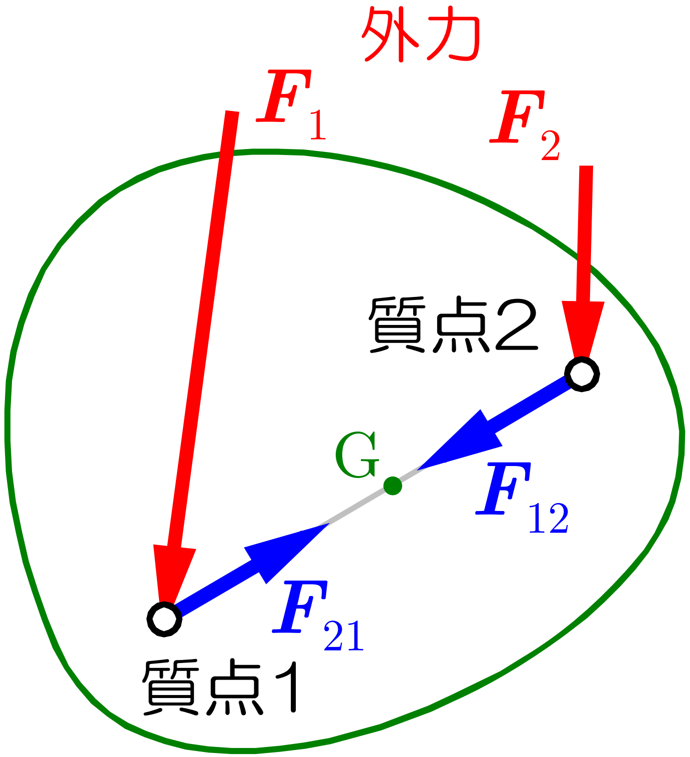


- 外力$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$が作用しているときの重心の加速度を求めよ

系の重心に関する運動方程式

- ２質点系の重心の加速度
  - 外力が作用しているとき

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2}{m_1 + m_2}$$



  - 系の全質量：$M = m_1 + m_2$

- 系の重心$\boldsymbol{r}_G$に関する運動方程式を示せ

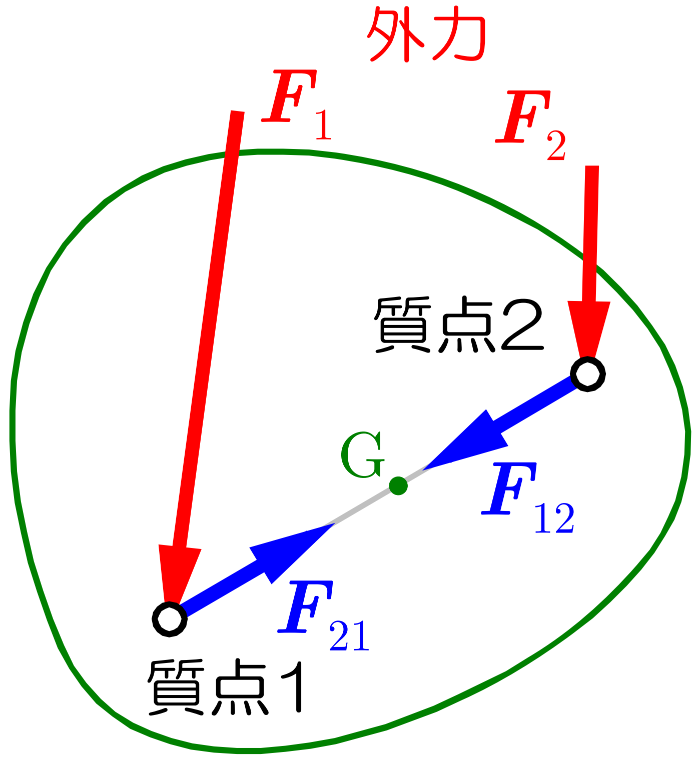
系の重心に関する運動方程式

- ２質点系の重心$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$に関する運動方程式を示せ
  - 重心の加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \frac{\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2}{m_1 + m_2}$$

  - 両辺に $M = m_1 + m_2$ をかけて
- 重心$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$に関する運動方程式

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$



系の重心に関する運動方程式

- N 質点系
  - 全運動量： $\boldsymbol{P}=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{p}_j=\sum_{j=1}^{N}m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j$
  - 重心位置： $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}=\dfrac{\sum_{j=1}^{N}m_j\boldsymbol{r}_j}{\sum_{j=1}^{N}m_j}=\dfrac{\sum_{j=1}^{N}m_j\boldsymbol{r}_j}{M},\quad M=\sum_{j=1}^{N}m_j$
- 全運動量$\boldsymbol{P}$ を$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ を使って表せ

N質点系の全運動量

- 重心位置$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ を使って全運動量$\boldsymbol{P}$ を表す

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j$$

- 重心位置：$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j}{M} \quad \longrightarrow \quad M\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j$

$$\therefore \boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j = M\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}}$$

- 系の全運動量 ＝ 系の全質量 × 重心の速度

系の重心に関する運動方程式

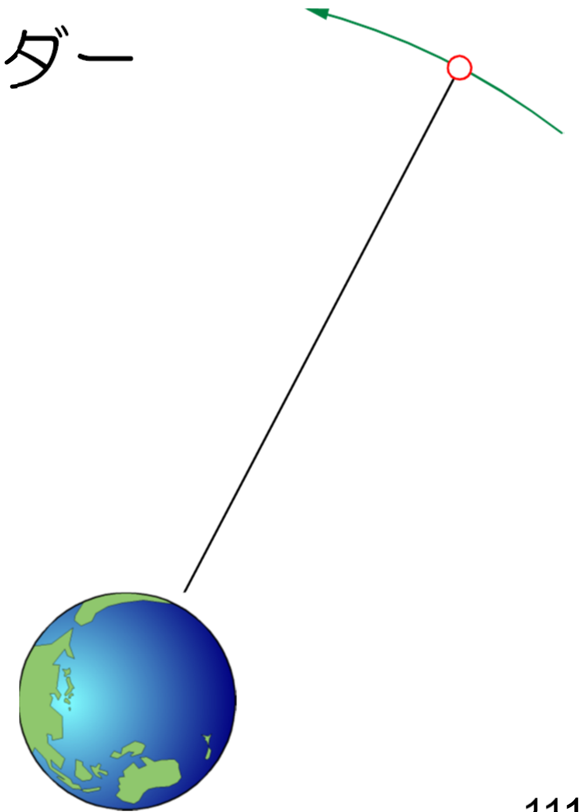
- N 質点系
  - 重心位置： $$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j}{M}, \quad M = \sum_{j=1}^{N} m_j$$
  - 全運動量： $$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{p}_j \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j$$
- 以上より，
  系の重心 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ に関する運動方程式を導け

系の重心に関する運動方程式

- N 質点系： $M\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j$
  - 質点系の全質量 × 重心の加速度 ＝ 外力の和
- 質点系の重心の加速度は,
  外力の和を全質量で割ったものに等しい
  - 質点系の重心は，質量 M の質点に
    全外力を合成した力が作用したときと同じ運動
  - 内力が働いていても，重心の運動は変わらない
  - 外力がなければ，重心は等速度運動

2体問題

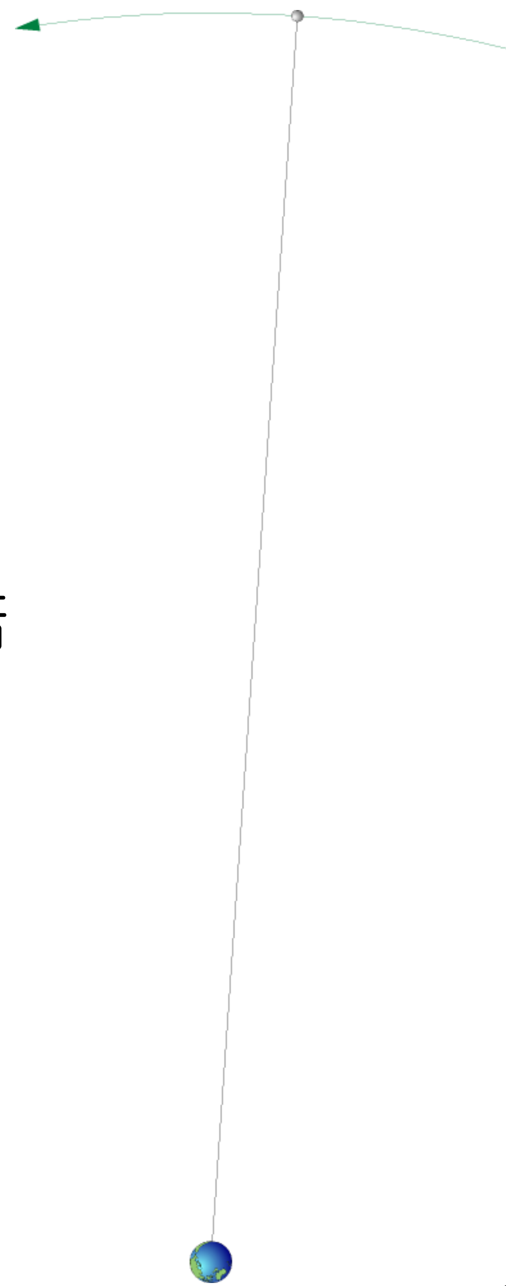
- ２個の質点からなる質点系の運動に関する問題
  - 太陽と地球，地球と月，地球と人工衛星，…
  - 太陽と地球：質量比は10^7のオーダー
    - 地球の質量は無視できる
    - 太陽は不動と考えていい
  - 地球と月：質量比は81.3
    - 月の質量は無視できない
    - こうした問題を考える



2体問題

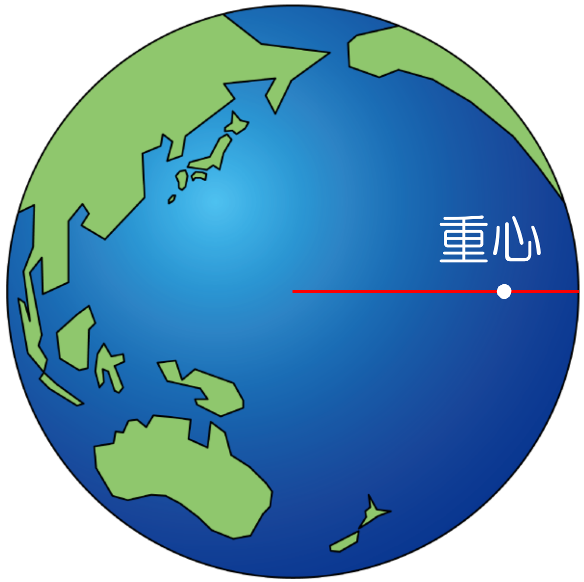
- 地球と月の重心を求めてみる
  - 月の質量：地球の約1/80
  - 月の半径：地球の1/3.6
  - 月の軌道半径：地球半径の約60倍

- 重心と地球の中心との距離は
  地球の半径の何倍か
  - １より大きければ,
    重心は地球の外にある



2体問題

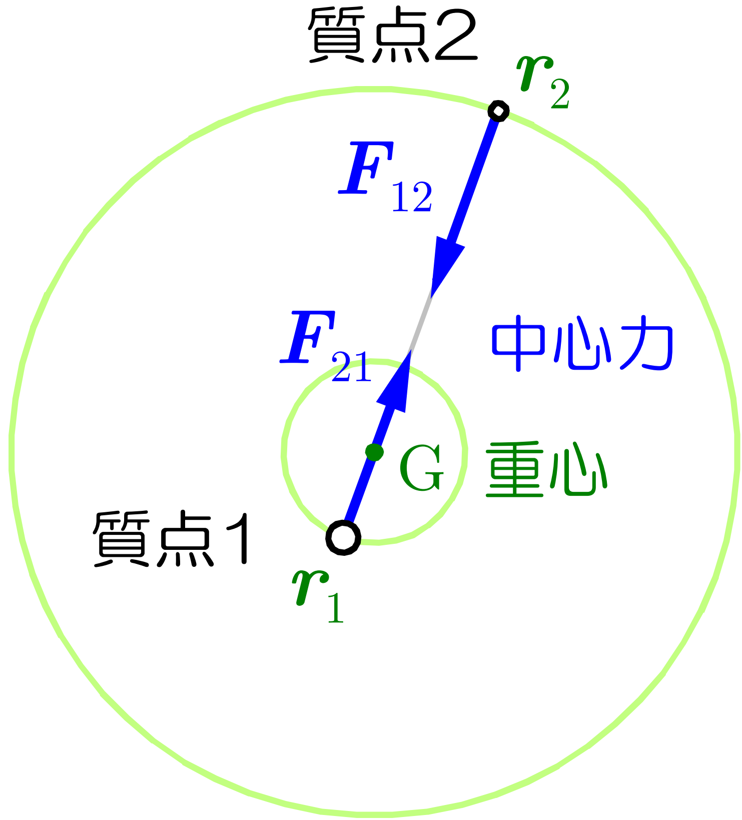
- 重心と地球の中心との距離r_G
  - 地球の半径の74%
  - 重心は地球の内側にある



- 地球も月も,
  この重心まわりに
  回転運動をしている
  - 遠心力 > 月の引力となるため
    月と反対側でも満潮となる

2体問題その2

- 中心力を及ぼしあう２質点
  - それぞれ重心まわりを回転
  - 質点の質量：m_1，　m_2
  - 質点の位置：$\boldsymbol{r}_1$，　$\boldsymbol{r}_2$
  - 質点間の距離：　$r = \left| \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \right|$
  - 中心力：　$\boldsymbol{F}_{21} = f(r)\dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r}$，　$\boldsymbol{F}_{12} = f(r)\dfrac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r}$
    - ・引力（符号は負）×方向余弦（力の向き）



- 各質点の運動方程式を示せ

中心力を及ぼしあう2質点

- 各質点の運動方程式

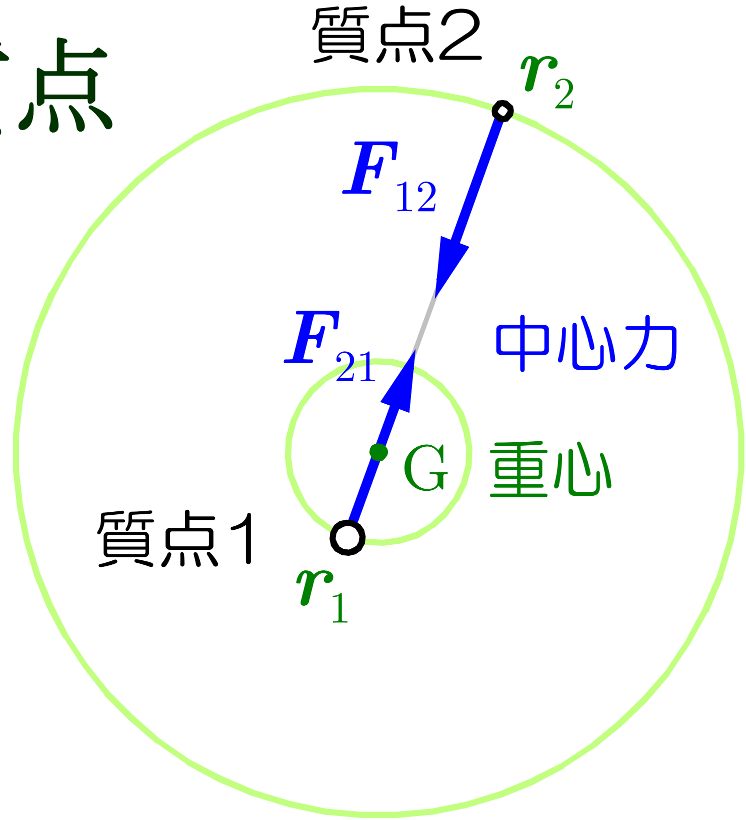
$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = f(r)\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = f(r)\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r}$$

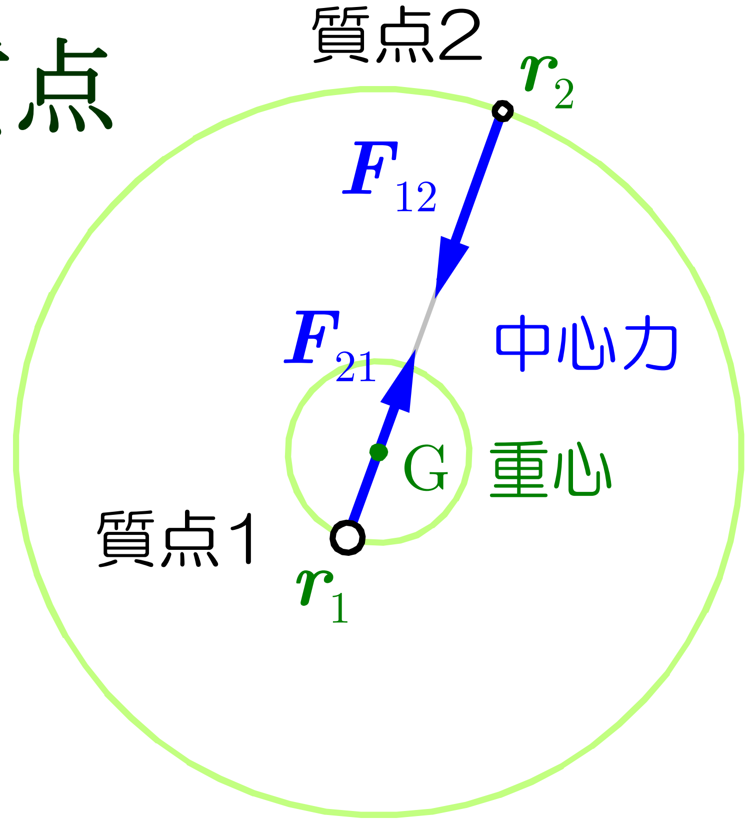
- 系の重心$\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$に関する運動方程式を示せ

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

  - 系の全質量：$M = m_1 + m_2$



中心力を及ぼしあう2質点



- 系の重心$\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$に関する運動方程式
  - $\boldsymbol{r}_G = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$ より

$$\left(m_1 + m_2\right)\ddot{\boldsymbol{r}}_G = m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2$$

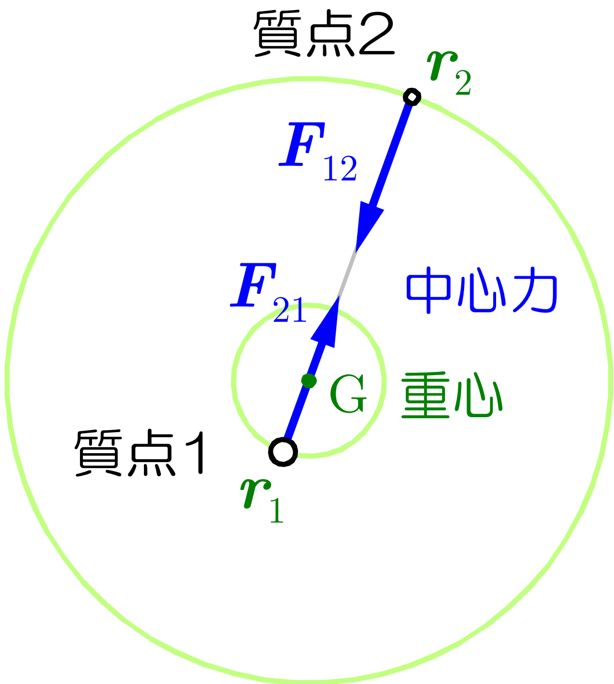
$$= f(r)\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r} + f(r)\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r} = 0$$

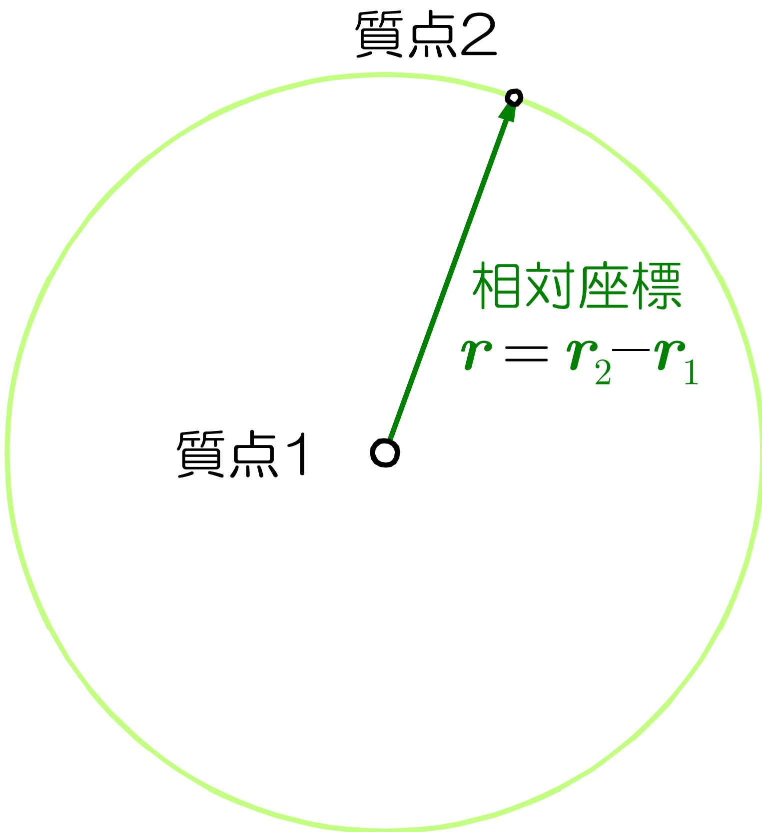
$$\therefore M\ddot{\boldsymbol{r}}_G = 0$$

  - ２質点の重心は等速度運動する

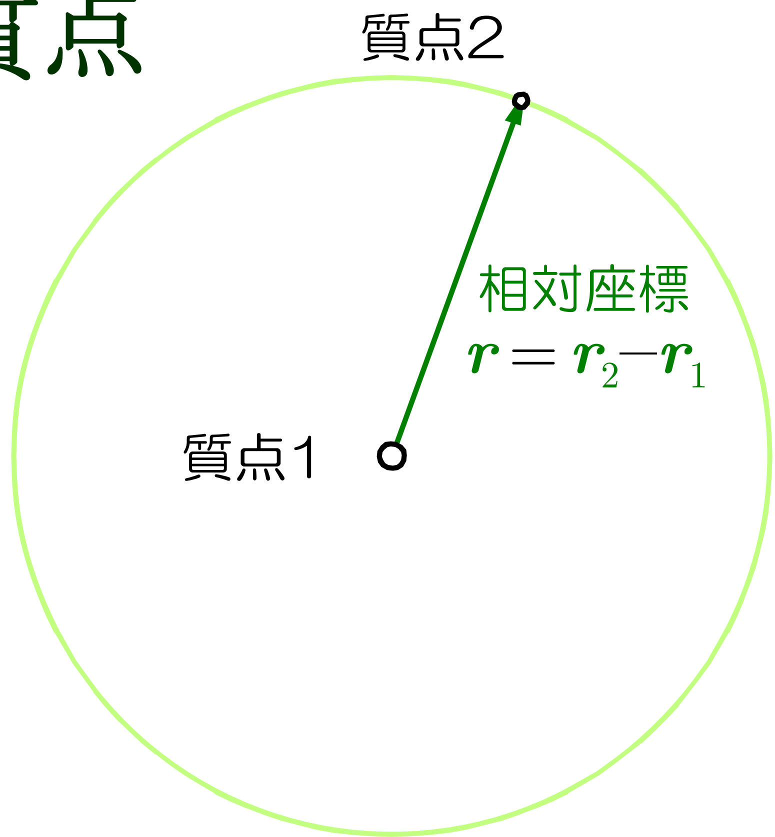
中心力を及ぼしあう2質点

- 相対運動を考えてみる
  - 質点１を基準とした質点２の運動
  - 相対座標：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$





中心力を及ぼしあう2質点



- 相対運動を考えてみる
  - 質点１を基準とした（質点１の上から見た）質点２の運動
  - 相対座標：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$
- 各質点の運動方程式より

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = f(r)\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r}, \quad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = f(r)\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{r}$$

質点１を基準とした質点２の加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を求めよ

中心力を及ぼしあう2質点

- 相対運動：質点１を基準とした質点２の加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{m_2} f(r) \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r} - \frac{1}{m_1} f(r) \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- 換算質量 $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ として

相対座標$\boldsymbol{r}$に関する運動方程式を示せ

中心力を及ぼしあう2質点

- 相対運動：質点１を基準とした質点２の加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mu} f(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- 相対座標$\boldsymbol{r}$に関する運動方程式

$$\mu \ddot{\boldsymbol{r}} = f(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

  - 質点１を基準とした質点２の運動：
  - 質点１が固定されていて，
    質点２の質量がμになったときの運動　と等しい

中心力を及ぼしあう2質点

- 相対運動：質点２を基準とした質点１の運動
  - 相対座標：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ とおいても
  - 質点２を基準とした質点１の加速度　$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{1}{\mu} f(r) \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$
  - 相対座標$\boldsymbol{r}$に関する運動方程式

$$\mu \ddot{\boldsymbol{r}} = f(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

  - 質点２を基準とした質点１の運動：
  - 質点２が固定されていて，
    質点１の質量がμになったときの運動　と等しい

第11回の内容

- 質点系の力学
  - 質点系
  - 運動量保存の法則
  - 重心の運動
  - ２体問題

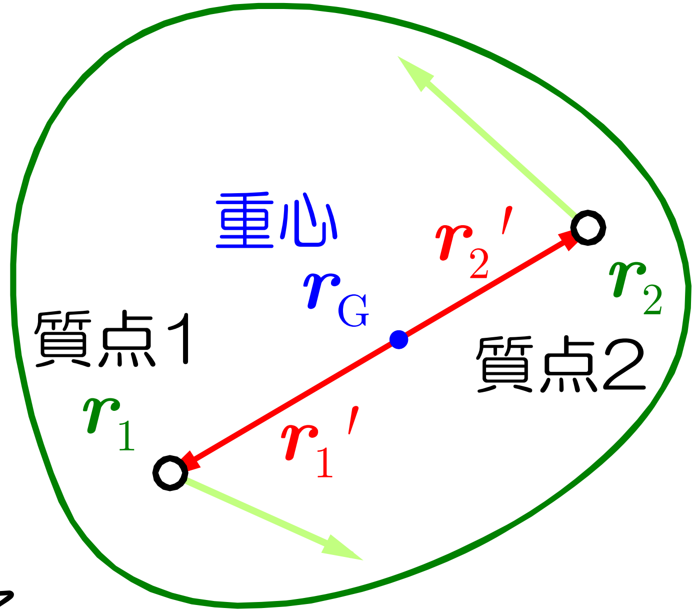
  - 運動エネルギー
  - 角運動量
  - 重心の運動と重心まわりの回転運動（相対運動）

質点系の力学(前回のまとめ)

- 系の全運動量の時間的変化は外力の和に等しい

  ⇨ 重心に関する運動方程式

  ・系の総体としての運動



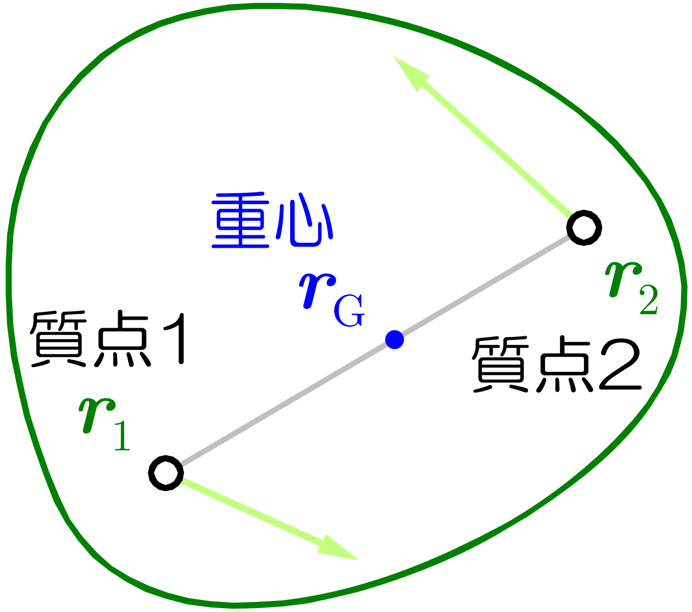
- 今回は，系の角運動量を考える
  - 各質点の運動：重心からの相対運動と考える

    ・各質点の位置： $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}_2{}'$

    ・ $\boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2{}'$：重心から見た質点の位置
  - 本題に入る前に…

運動エネルギー

- ２質点系
  - 質点の質量：m_1，m_2
  - 質点の位置：$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$
  - 系の重心：$\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{M}$
  - 系の全質量：$M = m_1 + m_2$

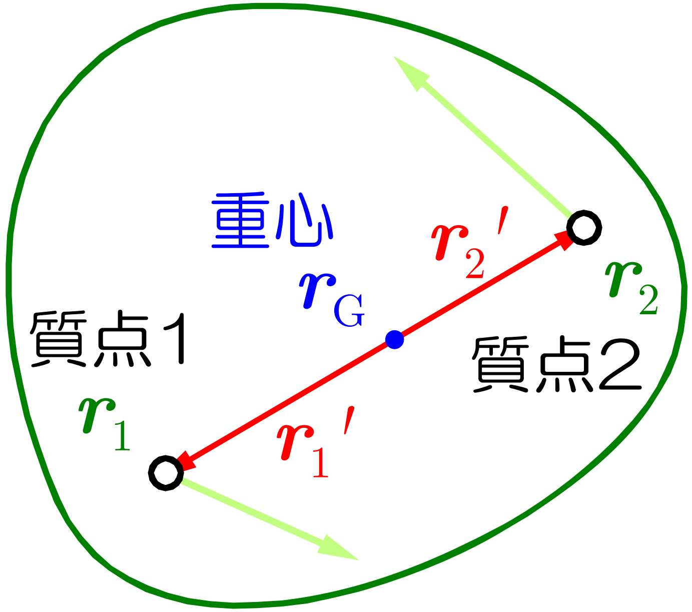


- この系の運動エネルギーKを求めよ
  - m_1，m_2，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$（およびその微分）を使って表せ

運動エネルギー

- ２質点系の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^{\,2}$$



- 質点の位置を次のようにおく
  - $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_\mathrm{G} + \boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_\mathrm{G} + \boldsymbol{r}_2{}'$
  - $\boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2{}'$：重心から見た質点の位置

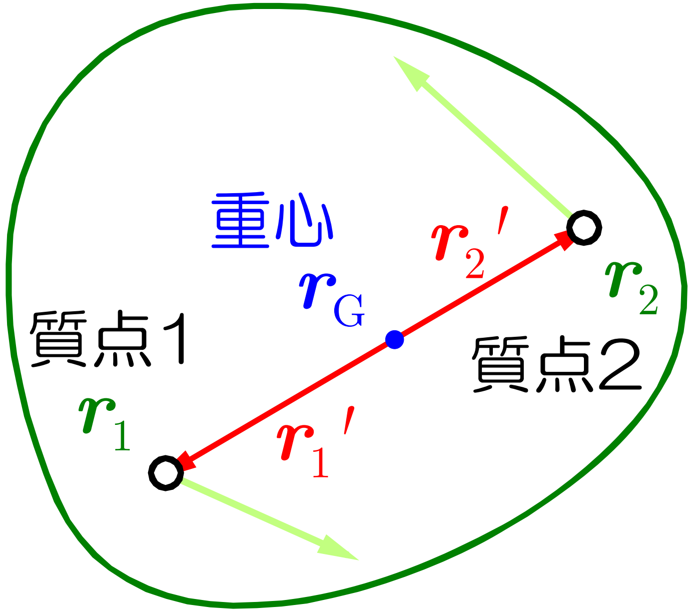
- この式を重心の式に代入して，$\boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2{}'$ に関する関係式を導け

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{M}$$

運動エネルギー

- ２質点系の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\,2}$$



- $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_2{}'$

$$m_1 \boldsymbol{r}_1{}' + m_2 \boldsymbol{r}_2{}' = 0$$

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{M}$$

- 系の運動エネルギーを
  $\boldsymbol{r}_G$， $\boldsymbol{r}_1{}'$， $\boldsymbol{r}_2{}'$ を使って表せ
  - また，その意味を考えよ

運動エネルギー

- $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$，$\boldsymbol{r}_1{}'$，$\boldsymbol{r}_2{}'$ を使って運動エネルギーを表す

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}}{}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1{}'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2{}'^2$$

- ２質点系の全運動エネルギー：
  - 重心の運動エネルギー

    ＋
  - 重心に相対的な運動エネルギー

- N 個の質点からなる系ではどうか？

運動エネルギー

- N 質点系
  - 重心位置：　$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j}{M}$$
  - 全質量：　$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j$$
- この系の運動エネルギーK を求めよ
  - m_j，$\boldsymbol{r}_j$（およびその微分）を使って表せ

運動エネルギー

- N 質点系：　$K = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\,2}$
  - 重心位置：　$\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j}{M}$
  - $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_\mathrm{G} + \boldsymbol{r}_j{}'$ とおくと，　$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j{}' = 0$
- 系の運動エネルギーを$\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$，　$\boldsymbol{r}_j{}'$ を使って表せ

運動エネルギー

- $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ ， $\boldsymbol{r}_j{}'$ を使って運動エネルギーを表す

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}}{}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j{}'^2$$

- 質点系の全運動エネルギー：
  - 重心の運動エネルギー

    ＋
  - 重心に相対的な運動エネルギー

角運動量(9回目)

- 角運動量の時間的変化の割合は力のモーメントに等しい

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

⇩

- 角運動量保存の法則
  - 力のモーメントが作用しないとき角運動量は一定に保たれる

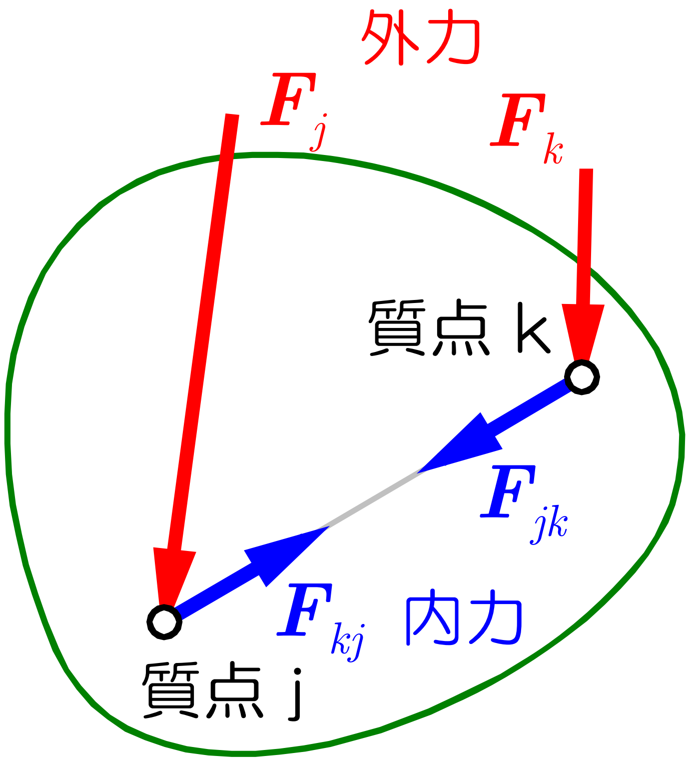
- ９回目の授業：１質点を考えた
  - 質点系の場合は？

N質点系の角運動量

- j 番目の質点の運動方程式（$j = 1, 2, \ldots, N$）

$$\dot{\boldsymbol{p}}_j = m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{F}_j + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}$$

  - 外力：$\boldsymbol{F}_j$
  - 内力：$\boldsymbol{F}_{kj}$（質点k から）



- 系の角運動量：　$\boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{p}_j$
  - その時間微分　$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}$　を計算せよ

N質点系の角運動量

- 系の角運動量の時間微分

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j$$

  - 外力のモーメント　$\boldsymbol{N} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j$　とおけば

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

- 質点系の角運動量の時間的変化の割合は外力のモーメントに等しい

角運動量保存の法則

- 質点系の角運動量の時間的変化の割合は
力のモーメントに等しい

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

$$\Downarrow$$

- 角運動量保存の法則
  - ある点まわりの力のモーメントが常にゼロのとき
質点系の角運動量は一定に保たれる

重心との相対運動

- j 番目の質点の位置を次のようにおく（$j = 1, 2, \ldots, N$）
  - $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}_j{}'$
  - $\boldsymbol{r}_j{}'$：重心から見た質点j の位置
- 質点j の運動量：　$\boldsymbol{p}_j = m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j = m_j \left(\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{r}}_j{}' \right)$
- 系の角運動量$\boldsymbol{L}$ を$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$，$\boldsymbol{r}_j{}'$ を使って表せ

$$\boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{p}_j$$

重心との相対運動

- $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$， $\boldsymbol{r}_j{}'$ を使って系の角運動量$\boldsymbol{L}$ を表す

$$\boldsymbol{L} = \left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{P}\right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\boldsymbol{r}_j{}' \times \boldsymbol{p}_j{}'\right)$$

  - $\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{P}$ ：重心の角運動量
  - $\boldsymbol{L}' = \sum_{j=1}^{N} \left(\boldsymbol{r}_j{}' \times \boldsymbol{p}_j{}'\right)$ ：重心まわりの角運動量

とおけば　$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{L}'$

- 角運動量 ＝ 重心運動 ＋ 重心まわりの運動

N質点系の外力のモーメント

- 外力のモーメント：　$\boldsymbol{N} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j$

- j 番目の質点の位置を次のようにおく
（$j = 1, 2, \ldots, N$）
  - $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}_j'$
  - $\boldsymbol{r}_j'$：重心から見た質点j の位置

- 外力のモーメント$\boldsymbol{N}$ を$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$，$\boldsymbol{r}_j'$ を使って表せ

N質点系の外力のモーメント

- $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$， $\boldsymbol{r}_j{}'$ を使って外力のモーメント$\boldsymbol{N}$ を表す

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}'$$

原点まわりの

- $\boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j$
  - ・全外力が重心に集中したときのモーメント
- $\boldsymbol{N}' = \sum_{j=1}^{N} \left(\boldsymbol{r}_j{}' \times \boldsymbol{F}_j \right)$
  - ・重心まわりの外力のモーメント

重心との相対運動

- 系の角運動量 ＝ 重心運動 ＋ 重心まわりの運動

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{L}'$$

  - 外力のモーメント：　$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}'$
  - $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$　より　$\dfrac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt} + \dfrac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}'$

- この式も２つの運動に分離できるか？
  - 結論から言うと，分離できる

重心との相対運動

1. 重心運動

- N 質点系の重心に関する運動方程式

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j$$

- 重心運動に関する角運動量

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times M\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}}$$

- その時間微分 $\dfrac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt}$ を計算せよ

重心との相対運動

2. 重心まわりの運動

- $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$ より $\dfrac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt} + \dfrac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}'$

- 重心運動： $\dfrac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}}$

- 差を取って $\dfrac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}'$

- 角運動量とモーメントの関係式（運動方程式）
  - 重心に関する式 と 重心まわりの式 に分離可能

まとめ

- 質点系の物理量
  - 運動エネルギー
  - 角運動量
- 質点系の運動方程式

- これらは
  - 重心の運動
  - 重心に相対的な運動（重心まわりの回転運動）

  に分けて考えることができる

質点系の運動方程式

- 系の運動量に関する関係式

  ⇨ 系の重心の運動方程式

実は
同じもの

- 系の角運動量に関する関係式
  - 系全体の「原点まわりの角運動量」

  系の重心の運動に関する方程式
  ＋
  質点群の「重心との相対運動」に関する方程式

  - それぞれ独立に成立する

第12回の内容

- 剛体の運動
  - 自由度
  - 剛体の運動方程式
  - 固定軸を持つ剛体
  - 慣性モーメント
  - 慣性モーメントの具体例
  - 例題：剛体ふり子，斜面を転がる球，球突き問題

力学で扱う物体

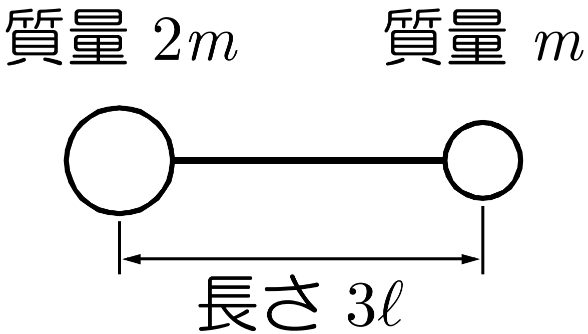
- 高校の物理　　　　理想的な物体
  - 質点：質量をもつが，大きさは持たない物体
- この授業
  - 質点系：質点の集まり（質点２つ以上）
  - 剛体：大きさをもち，変形しない物体
- 大学の力学　　　　現実的な物体
  - 弾性体，流体：変形する物体

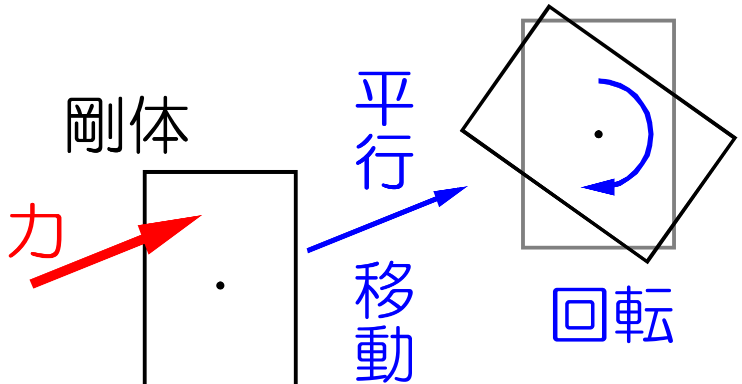
剛体

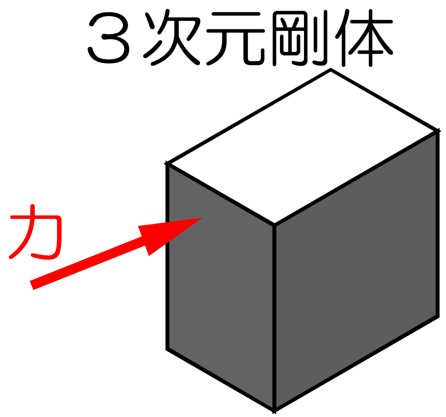
- 大きさをもち，変形しない物体

⇔ 質点：大きさがない

⇔ 弾性体：変形する





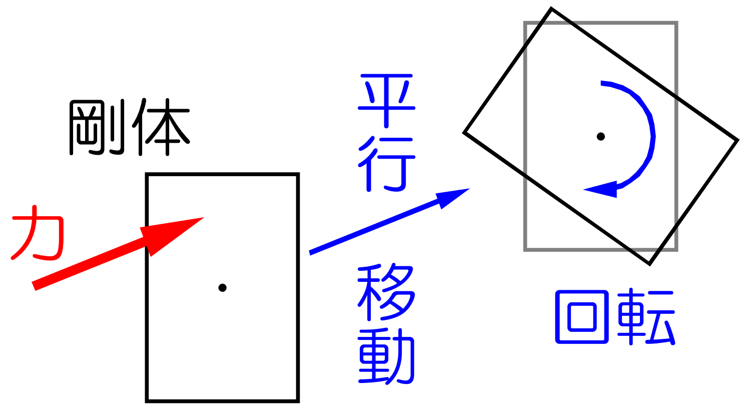


自由度

- 系の状態を決めるのに必要な変数（座標）の数
  - ・位置や姿勢

- 平面内の質点：２ ⇦ $(x,\ y)$ あるいは $(r,\ \varphi)$
- ３次元空間の質点：３ ⇦ $(x,\ y,\ z)$
- ｎ質点系（平面）：２ｎ
- ｎ質点系（立体）：３ｎ

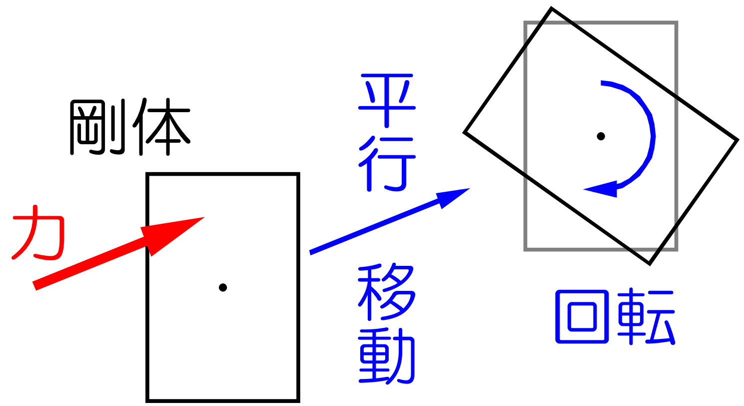
- 平面内での剛体の自由度はいくつか

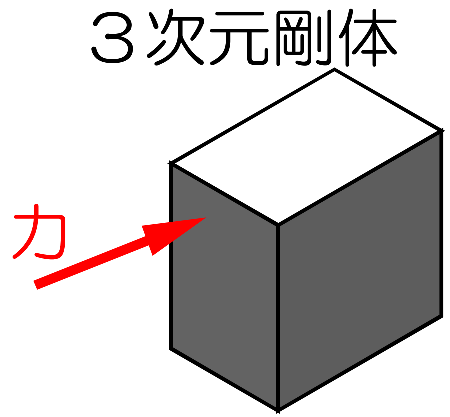


自由度

- 平面内での剛体の自由度
  - 剛体の重心：点
    - ２変数が必要
    - $(x,\ y)$ あるいは $(r,\ \varphi)$
  - さらに重心まわりに回転できる
    - 回転角θ

  ∴平面剛体の自由度は３



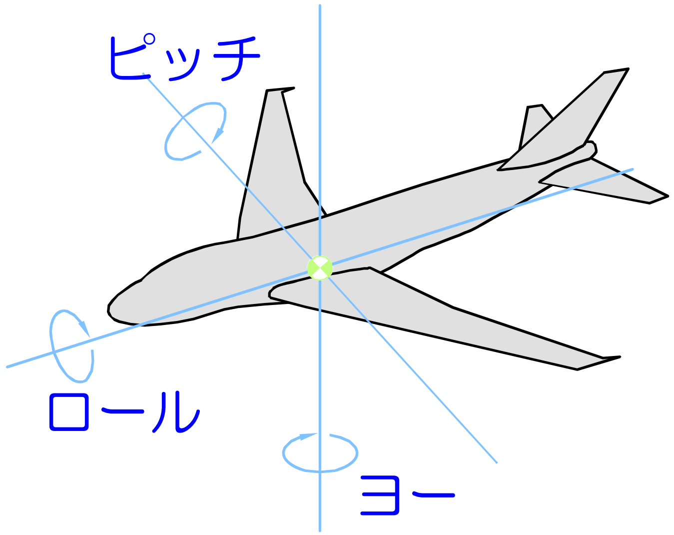


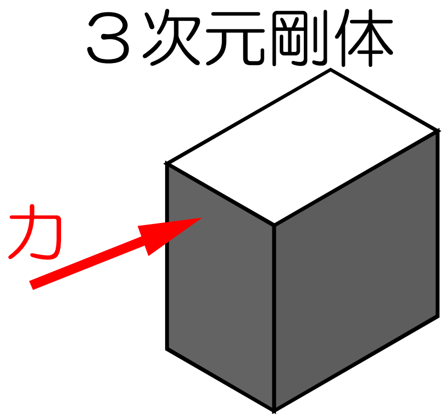
- では３次元剛体の自由度は？

自由度

- ３次元剛体の自由度
  - 剛体の重心：点
    - ３変数が必要
    - $(x,\ y,\ z)$
  - 重心まわりの回転
    - ３方向にできる
    - $(\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z)$

∴３次元剛体の自由度は６





自由度

- 系の状態を決めるのに必要な変数（座標）の数
  - ３次元空間の質点：３ ⇦ $(x,\ y,\ z)$
  - ３次元空間のｎ質点系：３ｎ
  - ３次元剛体の自由度は６

- 系の力学問題を考える際は,
  自由度 ＝ 求めるべき未知数の数　となる
  - 自由度 ＝ 必要な運動方程式の数　とも言える
  - 一般的には連立方程式となる

自由度

- 系の状態を決めるのに必要な変数（座標）の数
  - 例えば，３次元剛体の自由度は６
- 系の運動を記述するために必要な運動方程式の数
  - 系の重心に関する運動方程式
  - 重心との相対運動に関する運動方程式
- この授業では，自由度１の剛体を取り扱う
  - 固定軸を持つ剛体：剛体ふり子など
  - 回転運動する剛体：斜面を転がる球など

質点系の運動方程式

- 系の運動量に関する関係式

  ⇨ 系の重心の運動方程式

実は
同じもの

- 系の角運動量に関する関係式
  - 系全体の「原点まわりの角運動量」

    系の重心の運動に関する方程式
    ＋
    質点群の「重心との相対運動」に関する方程式

  - それぞれ独立に成立する

剛体の運動方程式

- 剛体の運動量に関する関係式

  ⇨ 重心の運動方程式

実は
同じもの

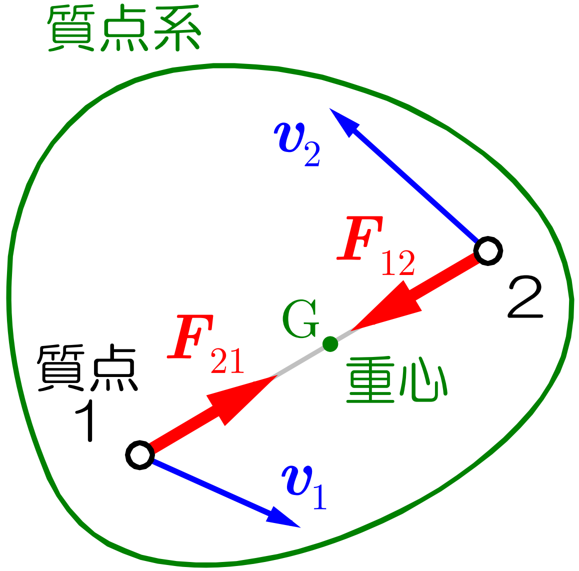
- 剛体の角運動量に関する関係式
  - 剛体の「原点まわりの角運動量」

$$\left\{\begin{array}{l}\text{重心の運動に関する方程式} \\ \qquad + \\ \text{重心まわりの回転運動に関する方程式}\end{array}\right.$$

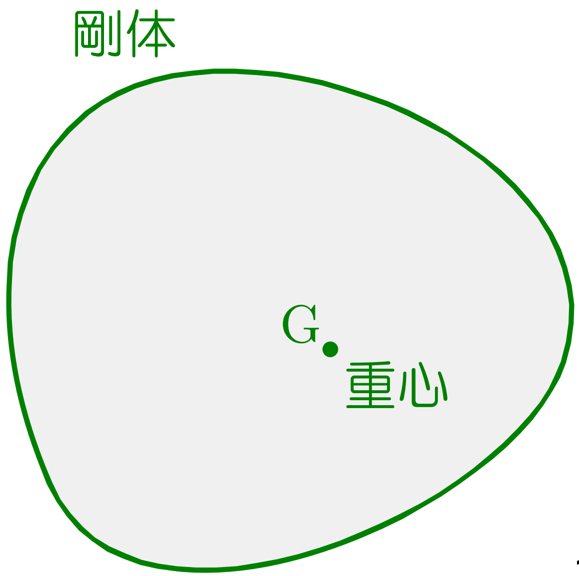
  - それぞれ独立に成立する

重心との相対運動

- 質点系
  - 重心まわりの回転運動
    ＋
  - 重心方向の運動



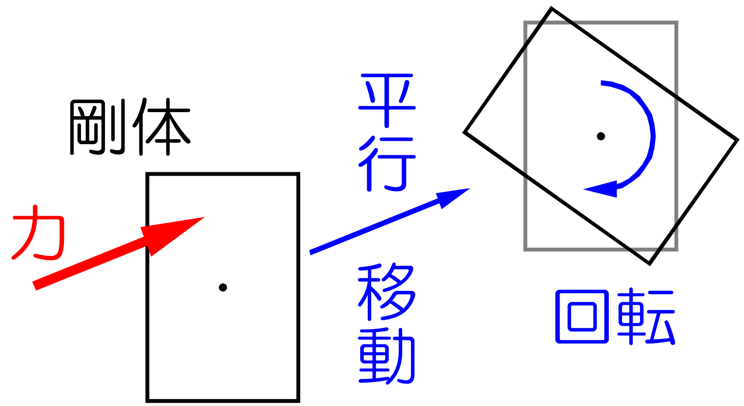
- 剛体：それ自体変形できない
  - 重心まわりの回転運動
    - 必ずしも重心
      でなくてもよいが…
    - 固定軸を与えてもいい



剛体の運動方程式

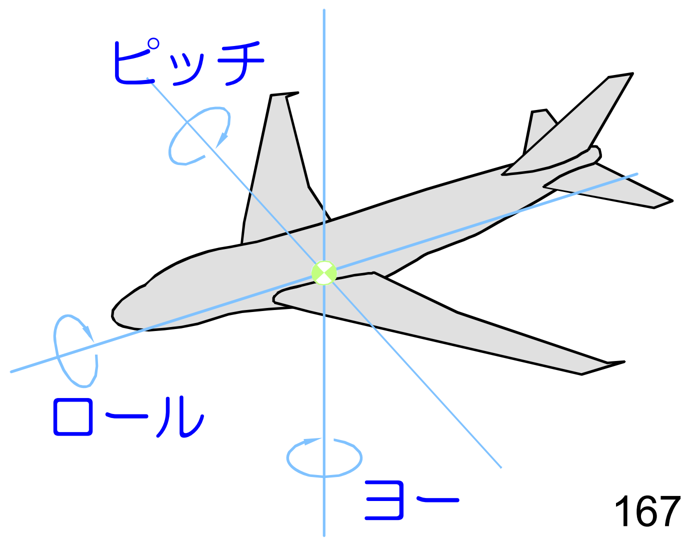
- 2次元剛体
  - 重心位置 $(x,\ y)$
  - 重心まわりの回転角θ

  に関する方程式：計３つ



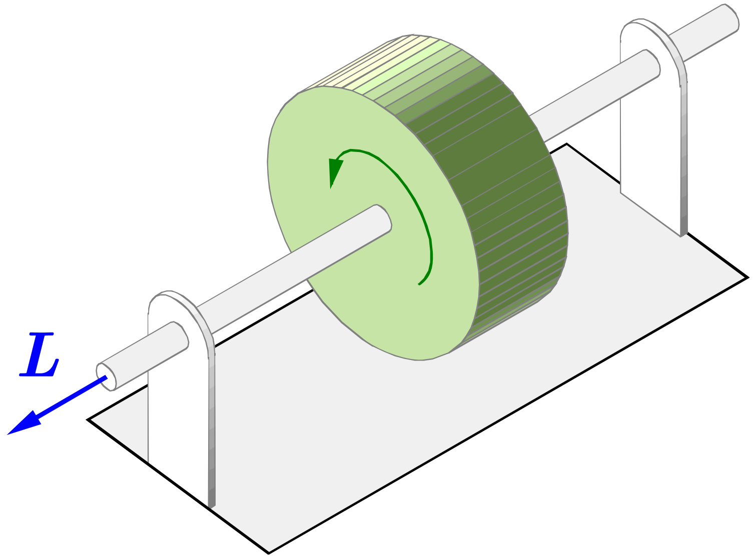
- ３次元剛体
  - 重心位置　$(x,\ y,\ z)$
  - 重心まわりの回転角 $(\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z)$

  に関する方程式：計６つ



固定軸を持つ剛体の運動

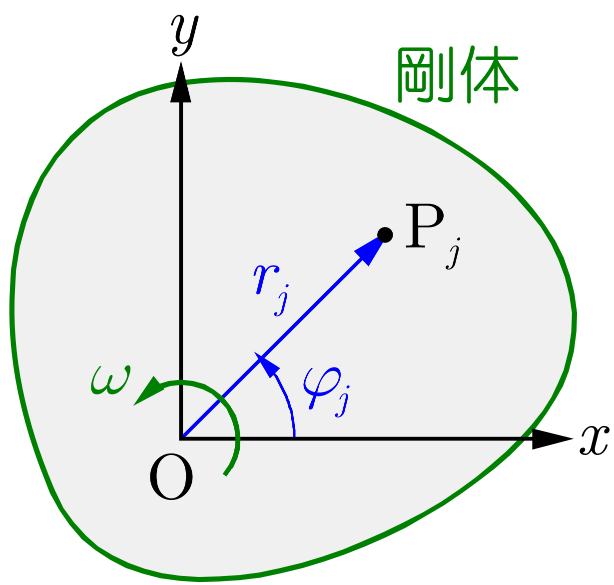
- あるひとつの直線まわりの回転運動のみ可能
  - 固定軸と呼ぶ
- 剛体の自由度：１
  - 固定軸まわりの回転角 φ で剛体の状態が決まる



- 剛体は通常，連続体として扱う
  - 連続体としての扱いは次回
  - N 個の質点からなる剛体を考えてみる

固定軸を持つ剛体の運動

- N 個の質点からなる剛体
  - j 番目の質点の位置を円筒座標で表すと
    $(r_j,\ \varphi_j,\ z_j),\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ N$
  - 固定軸 ＝ z 軸（原点O）
  - 質点P_j の質量：m_j
  - 質点P_j の角速度： $\omega = \dot{\varphi}_j$
    - ・どの質点も同じ ⇨ ω ：剛体の角速度



- ω を用いて，質点P_j の角運動量L_j を表せ

固定軸を持つ剛体の運動

- N 個の質点からなる剛体
  - 角運動量 ＝ 運動量のφ方向成分 × 動径r

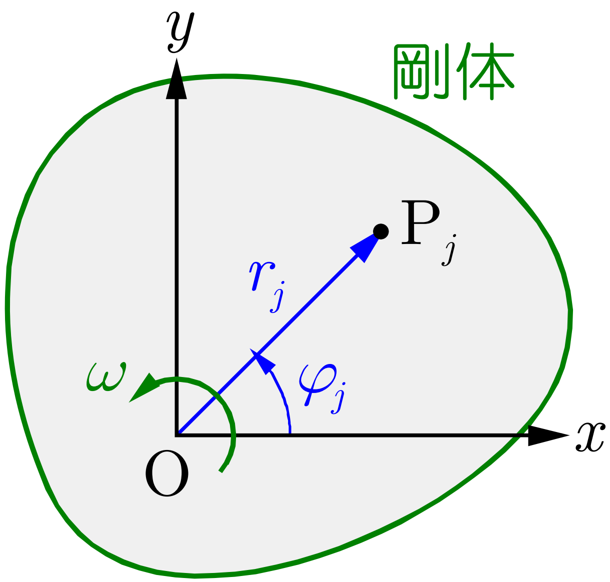
    ＝ 質量m × φ方向速度v_φ × 動径r

  - 質点P_j の角運動量L_j

$$L_j = m_j \cdot r_j\dot{\varphi}_j \cdot r_j$$

$$= m_j r_j^2 \dot{\varphi}_j$$

$$= m_j r_j^2 \omega$$



- ω を用いて，剛体の角運動量L を表せ

固定軸を持つ剛体の運動

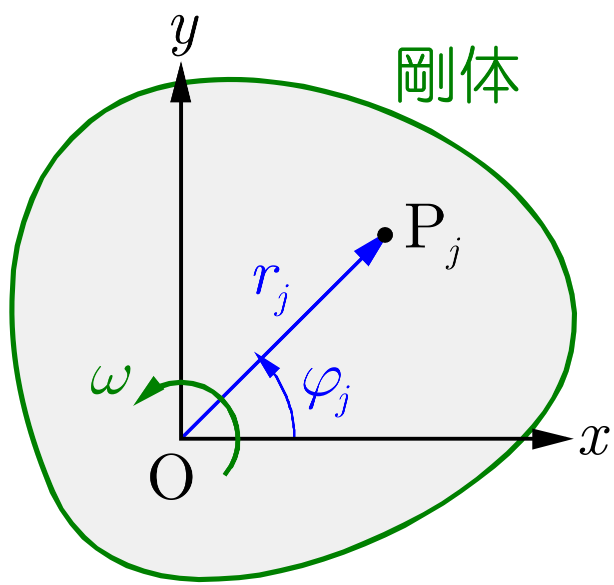
- N 個の質点からなる
  剛体の角運動量L

$$L = \sum_{j=1}^{N} L_j = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j{}^2 \omega$$

- 剛体の慣性モーメント

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j{}^2$$

⇨ $L = I\,\omega$



- 剛体の角運動量 ＝ 慣性モーメント × 角速度

固定軸を持つ剛体の運動

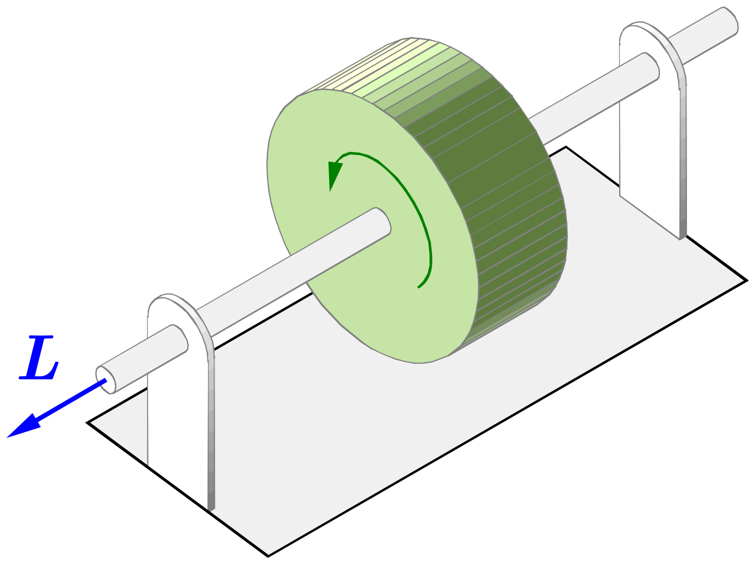
- 剛体の角運動量L ＝ 慣性モーメントI × 角速度ω
  - 角運動量：運動量×長さの次元 ［ML^{2}T^{-1}］
  - 慣性モーメント $I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2$
    - 回転運動における慣性
    - 質量 × 回転軸からの距離の２乗： ［ML^2］
  - 角速度：角度／時間 ［T^{-1}］
    - 剛体の回転角をφとすると $\omega = \dot{\varphi}$
  - したがって $L = I\omega = I\dot{\varphi}$

固定軸を持つ剛体の運動方程式

- 剛体の角運動量 ＝ 慣性モーメント × 角速度

$$L = I\omega = I\dot{\varphi}$$

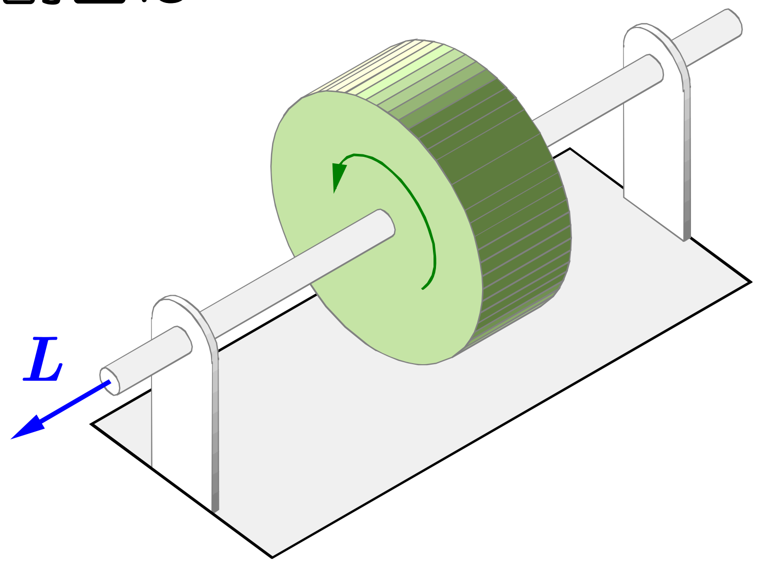
- 角運動量の時間的変化の割合は力のモーメントに等しい
  - 剛体に作用する力のモーメントをNとする
- 剛体の運動方程式を導け



固定軸を持つ剛体の運動方程式

- 剛体の運動方程式
  - 角運動量L の時間的変化の割合は力のモーメントN に等しい

$$\frac{dL}{dt} = N$$



- 剛体： $L = I\omega = I\dot{\varphi}$

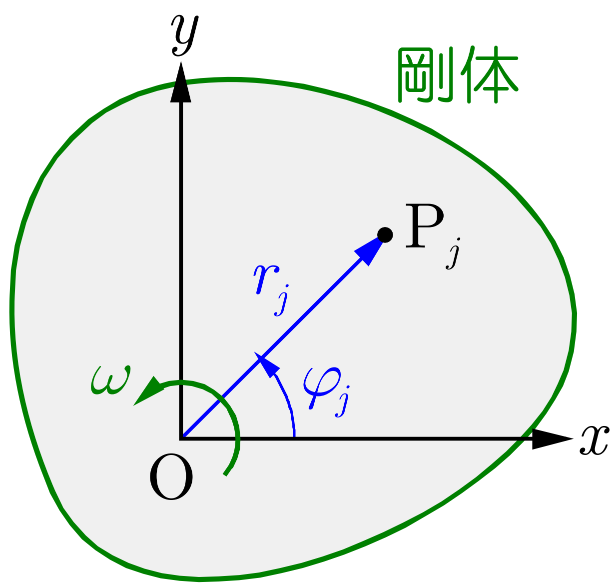
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\dot{\varphi}) = I\ddot{\varphi} = N \qquad (I\dot{\omega} = N)$$

  - 慣性モーメント × 角加速度 ＝ 力のモーメント

固定軸を持つ剛体の運動エネルギー

- N 個の質点からなる剛体
  - j 番目の質点の位置

    $(r_j,\ \varphi_j,\ z_j),\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ N$
  - 質点P_j の質量：m_j
  - 剛体の角速度：　$\omega = \dot{\varphi}$
  - 剛体内の質点の角速度：　$\omega = \dot{\varphi}_j$



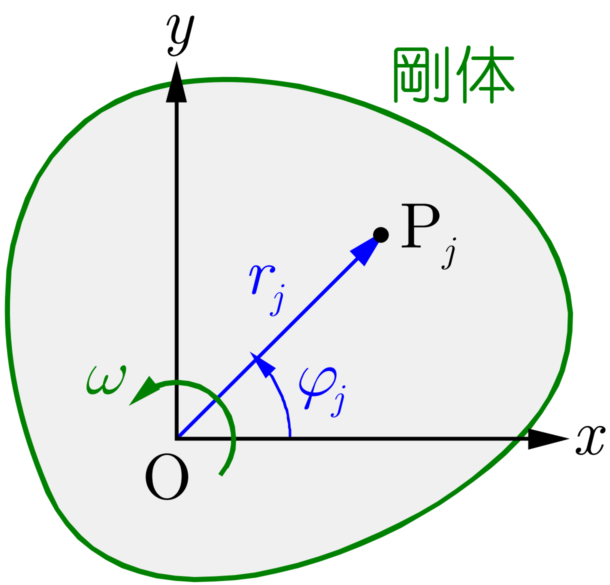
※極座標で表した質点の速度：$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\varphi) = (\dot{r}, r\dot{\varphi})$

- ω を用いて，質点P_j の運動エネルギーK_j を表せ

固定軸を持つ剛体の運動エネルギー

- N 個の質点からなる剛体
  - 質点P_j の速度
    - 動径方向にはゼロ
    - 回転角方向

$$v_\varphi = r_j \dot{\varphi}_j = r_j \omega$$



- 質点P_j の運動エネルギーK_j

$$K_j = \frac{1}{2} m_j \left(r_j \dot{\varphi}_j \right)^2 = \frac{1}{2} m_j \left(r_j \omega \right)^2$$

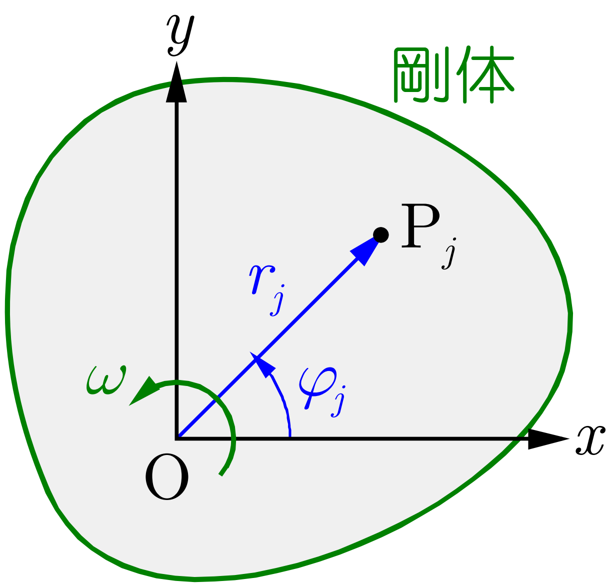
- ω を用いて，剛体の運動エネルギーK を表せ

固定軸を持つ剛体の運動エネルギー

- N 個の質点からなる剛体の運動エネルギー

$$K = \sum_{j=1}^{N} K_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \left(r_j \omega \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2 \omega^2$$



  - 剛体の慣性モーメント　$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2$

- I,　ω を用いて，剛体の運動エネルギー K を表せ

固定軸を持つ剛体の運動エネルギー

- 剛体の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

  - 慣性モーメント × 角速度の２乗 ［ＭＬ^2 Ｔ$^{-2}$］

- 質点の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

  - 質量 × 速度の２乗 ［ＭＬ^2 Ｔ$^{-2}$］

直線運動と回転運動

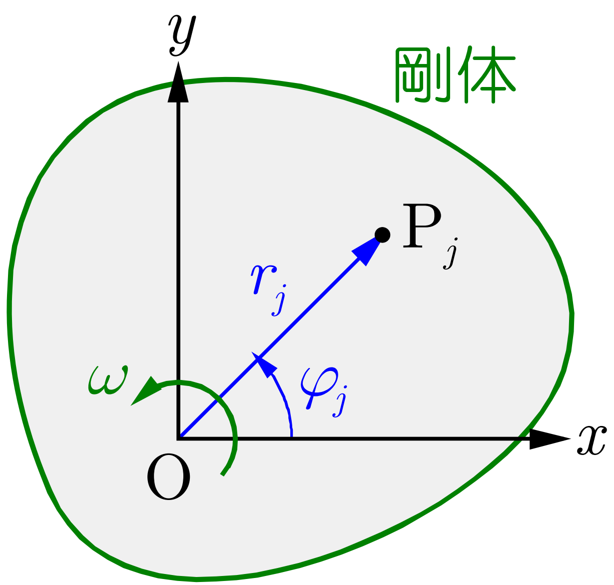
	直線運動	回転運動
慣性	質量m	慣性モーメントI
位置（座標）	x [長さ]	φ [角度]
速度	$v = \dot{x}$	角速度 $\omega = \dot{\varphi}$
外力	力 F [MLT^{-2}]	力のモーメント N [ML^2T^{-2}]
運動方程式	$m\ddot{x} = F$	$I\ddot{\varphi} = N$
運動エネルギー [ML^2T^{-2}]	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$

剛体の慣性モーメント

- N 個の質点からなる剛体
  - 固定軸 ＝ z 軸（原点O）

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2$$

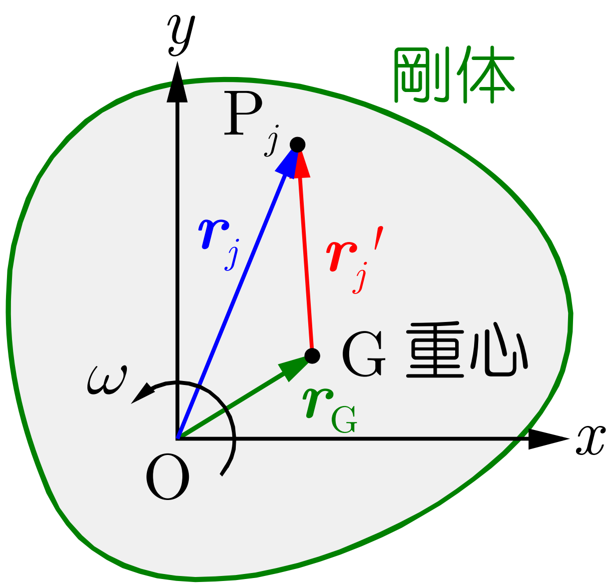
  - 全質量： $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$
  - 両者の比： $\kappa^2 = \dfrac{I}{M} = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2 \Big/ \sum_{j=1}^{N} m_j$
  - κ：回転半径と呼ぶ



剛体の慣性モーメント

- N 個の質点からなる剛体
  - 固定軸 ＝ z 軸（原点O）

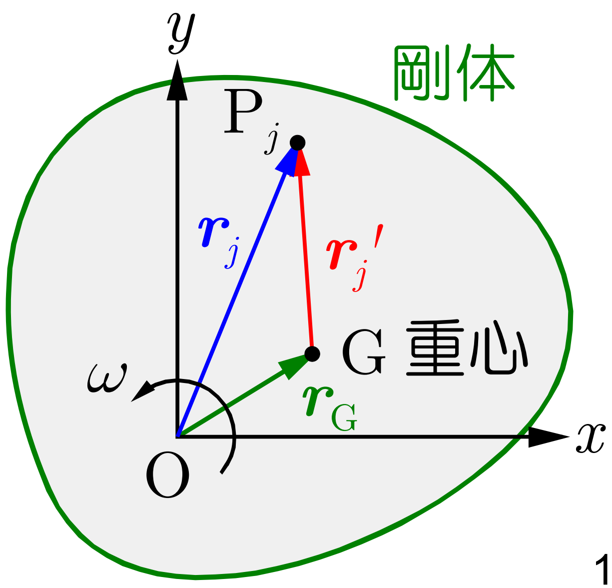
$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2$$



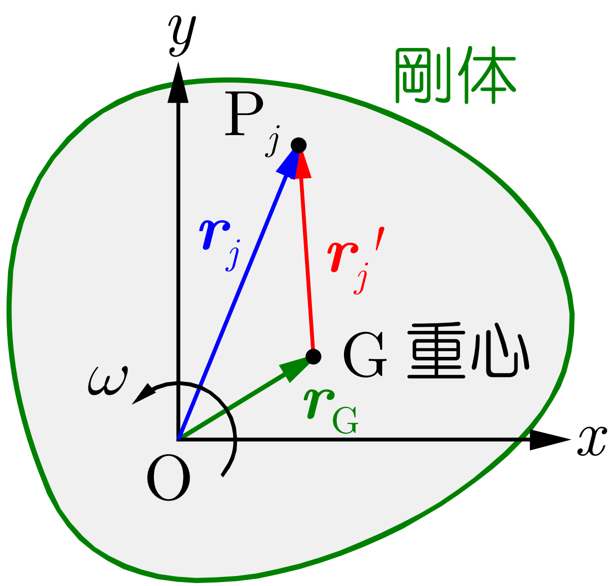
- 重心との相対運動を考える
  - z 軸方向の広がりを無視
  - $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_\mathrm{G} + \boldsymbol{r}_j'$　（$\boldsymbol{r}_j'$：重心から見た質点j の位置）
  - 重心（を通るz 軸の平行線）まわりの慣性モーメントI_G を示せ

剛体の慣性モーメント

- N 個の質点からなる剛体
  - 重心まわりの慣性モーメント　$I_G = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}_j'^2$
  - 固定軸（原点O）まわり　$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2$
- 重心との相対運動を考える
  - $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_j'$
  - $\boldsymbol{r}_j'$：重心から見た質点j の位置
- I とI_G の関係を求めよ



剛体の慣性モーメント



- I と I_G の関係

$$I = I_\mathrm{G} + M{r_\mathrm{G}}^2$$

- 固定軸まわりの慣性モーメント
  - 重心まわりの慣性モーメント

    ＋
  - 全質量 ×（重心と固定軸の距離）の２乗

- 重心まわりの慣性モーメントを知っていれば，任意の固定軸まわりの慣性モーメントは簡単に計算できる

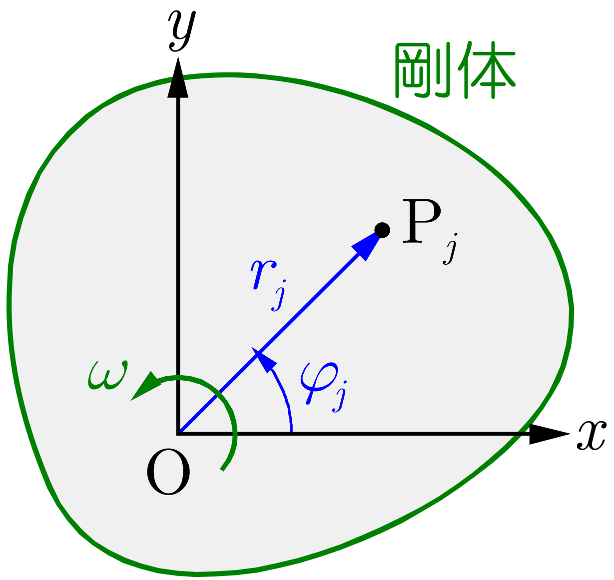
第13回の内容

- 剛体の運動

  - 慣性モーメントの具体例
  - 例題：剛体振り子の運動方程式
  - 例題：斜面を転がる球

  - 例題：フィギュアスケートのスピン
  - 例題：球突き（ビリヤード）の問題

剛体の慣性モーメント



- N 個の質点からなる剛体

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^2$$

  - 各質点の慣性モーメントの和

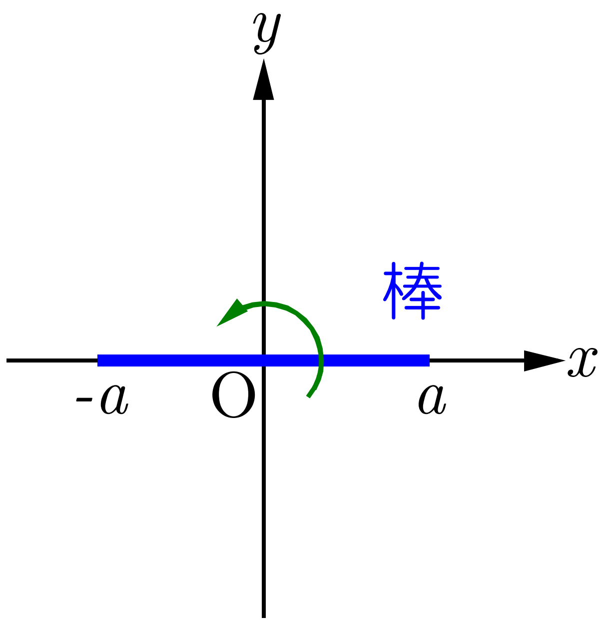
- 連続体の剛体：質量が連続的に分布
  - 微小区間を考えて
    その慣性モーメントを計算し，剛体全体で積分

$$I = \int_V \rho r^2 dV$$

  - ρ：剛体の密度，r：固定軸からの距離，V：体積

慣性モーメントの具体例

- 細い棒（１次元剛体）
  - 長さ：$2a$
  - 質量：M
  - 単位長さ質量： $\mu = \dfrac{M}{2a}$



- 重心まわりの慣性モーメントを求めよ
  - 原点O まわり，z 軸まわり

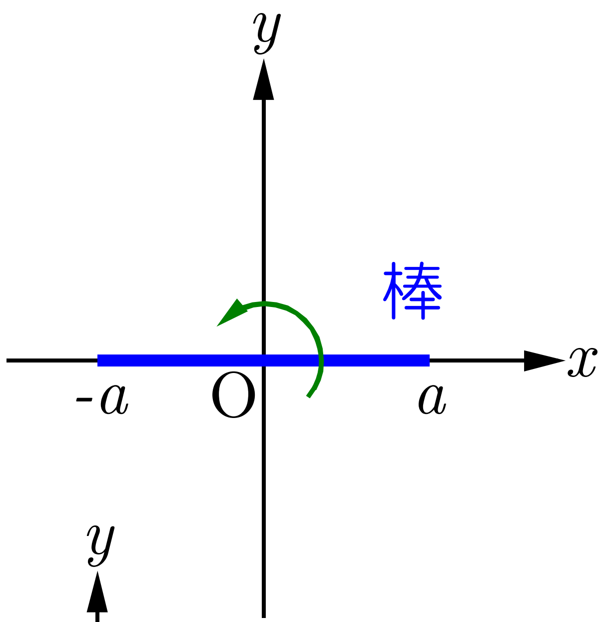
$$I_{\mathrm{G}} = \int_{-a}^{a} \mu x^2 dx$$

慣性モーメントの具体例

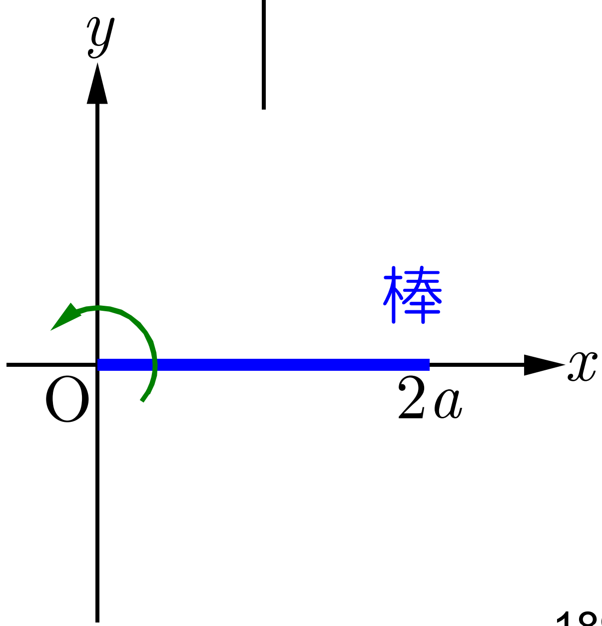
- 細い棒（１次元剛体）

$$I_{\mathrm{G}} = \int_{-a}^{a} \mu x^2 dx = \frac{M}{2a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{M}{6a}\left(a^3 + a^3\right) = \frac{1}{3}Ma^2$$

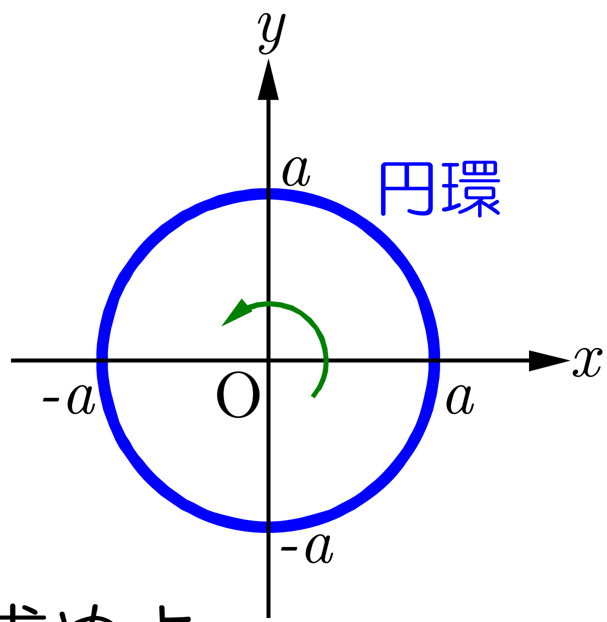


- 端点まわりの
  慣性モーメントを求めよ
  - 普通に計算
  - $I = I_{\mathrm{G}} + Mr_{\mathrm{G}}^2$ を使う



慣性モーメントの具体例

- 細い円環（２次元剛体）
  - 半径：a
  - 質量：M
  - 単位長さ質量： $\mu = \dfrac{M}{2\pi a}$



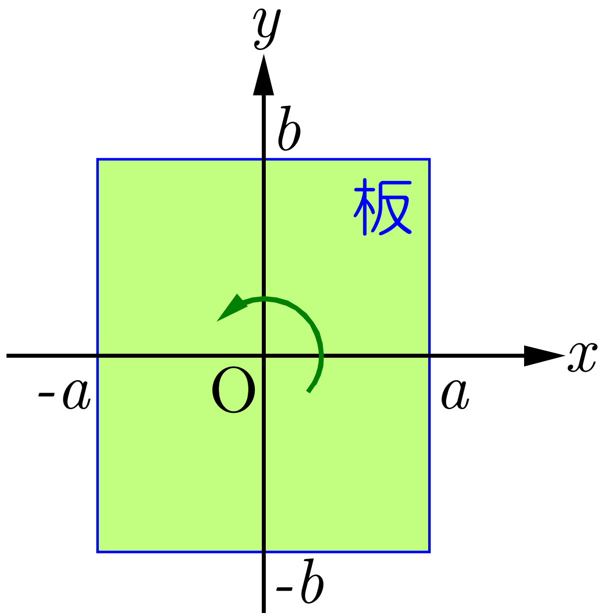
- 重心まわりの慣性モーメントを求めよ
  - 極座標を使う

$$I_{\mathrm{G}} = \int_0^{2\pi} \mu r^2 \, r \, d\varphi$$

  - 円環のすべての点は重心から同じ距離なので…

慣性モーメントの具体例

- 長方形の板（２次元剛体）
  - 大きさ：$2a \times 2b$
  - 質量：M
  - 単位面積質量： $\mu = \dfrac{M}{4ab}$

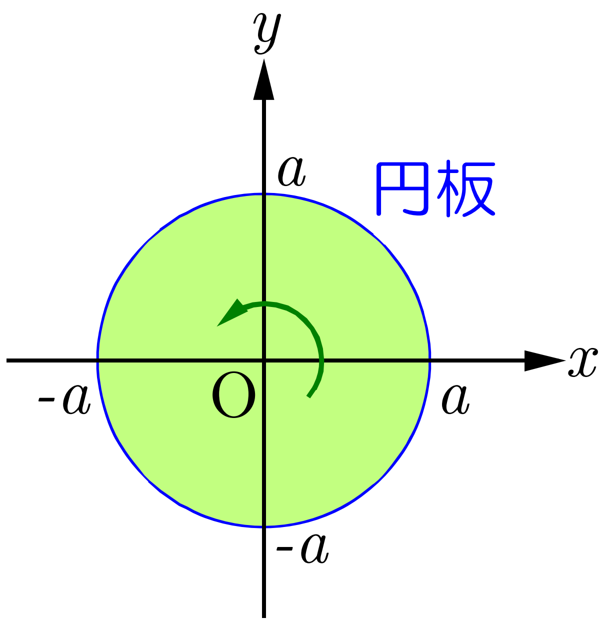


- 重心まわりの慣性モーメントを求めよ
  - 重積分は後期の「微分積分Ⅱおよび演習」で

$$I_{\mathrm{G}} = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \mu \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

慣性モーメントの具体例

- 円板（２次元剛体）
  - 半径：a
  - 質量：M
  - 単位面積質量： $\mu = \dfrac{M}{\pi a^2}$



- 重心まわりの慣性モーメントを求めよ
  - 極座標を使う

$$I_{\mathrm{G}} = \int_0^{2\pi}\int_0^a \mu r^2\, r\, dr d\varphi = \mu \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

慣性モーメントの具体例

- ３次元剛体（質量M）
  - 半径a，高さh の円柱

$$I_G = \frac{1}{2}Ma^2$$

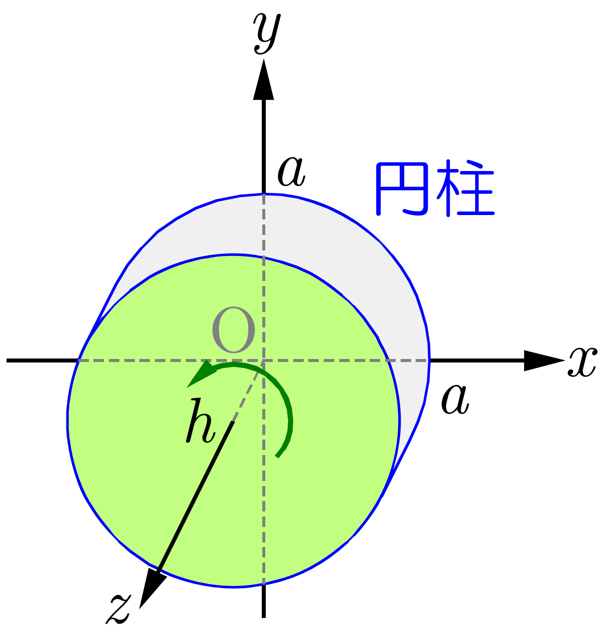
  - 半径a の球

$$I_G = \frac{2}{5}Ma^2$$

  - 半径a の球殻（ピンピン玉）

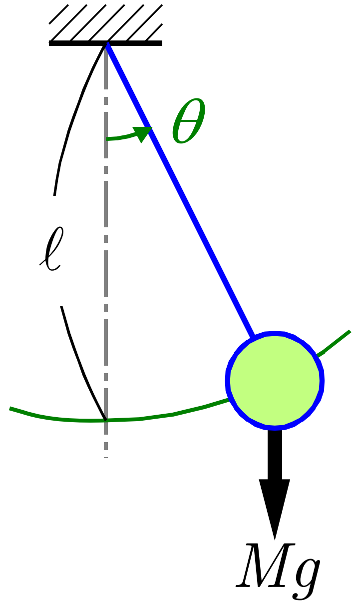
$$I_G = \frac{2}{3}Ma^2$$

    - なぜ球よりも大きいのか考えよ



剛体ふり子の運動方程式

- ２次元剛体ふり子
  - おもり：半径a，質量Mの円板
  - 棒：質量は無視できる
  - おもり中心と回転軸の距離：ℓ
  - ふり子の振れ角：θ
  - 重力加速度：g

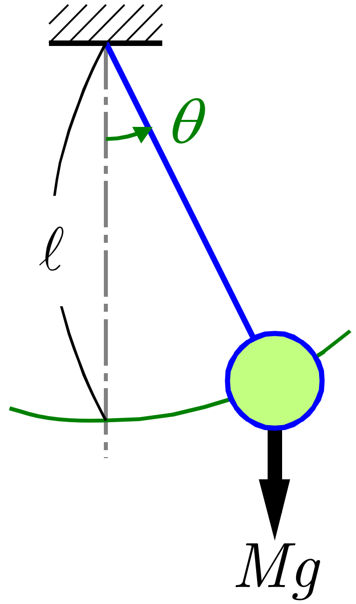


- ふり子の慣性モーメントを求めよ
  - 円板の重心まわりの慣性モーメント $I_{\mathrm{G}} = \dfrac{1}{2}Ma^2$

剛体ふり子の運動方程式

- ふり子の慣性モーメント

$$I = I_{\mathrm{G}} + M{r_{\mathrm{G}}}^2$$
$$= \frac{1}{2}Ma^2 + M\ell^2 = \frac{1}{2}M\left(a^2 + 2\ell^2\right)$$

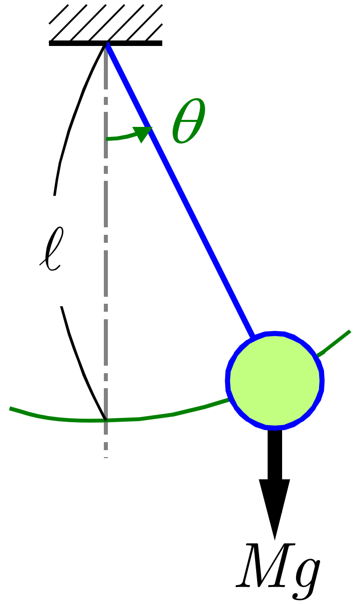


- ふり子の角運動量を求めよ
- ふり子に作用する
  重力のモーメントを求めよ
  - ふり子の振れ角：θ（向きに注意）
  - 重力加速度：g

剛体ふり子の運動方程式

- ふり子の角運動量

$$L = I\dot{\theta} = \frac{1}{2}M\left(a^2 + 2\ell^2\right)\dot{\theta}$$



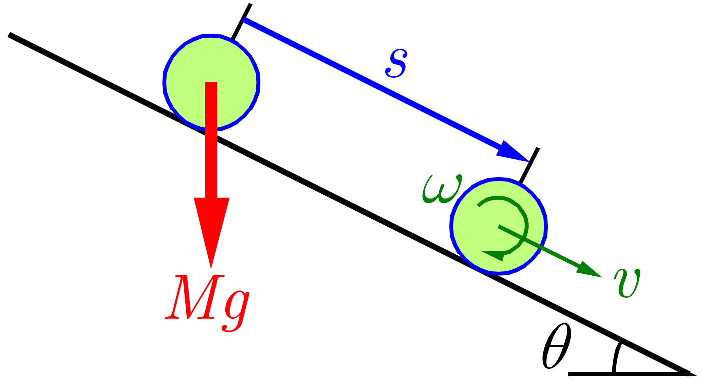
- ふり子に作用する重力のモーメント

$$N = -Mg\ell\sin\theta$$

- 両者の関係より，運動方程式を導け
  - 角運動量の時間的変化の割合は
    外力のモーメントに等しい

斜面を転がる球

- 転がる加速度を求めたい
  - 球：質量M
    半径a
    $$I_{\mathrm{G}}=\frac{2}{5}Ma^2$$
  - 斜面の傾きθ
  - 球と斜面の間に滑りは生じない ⇨ 自由度は1

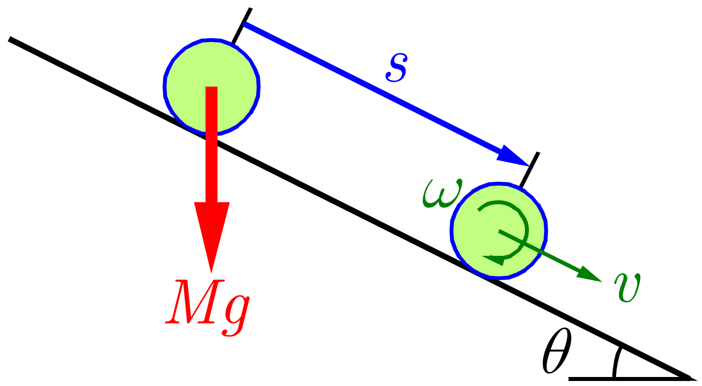


- 斜面に沿った球の移動量：s
  - 重心の速度：v，角速度：ωとする
  - 速度vと角速度ωの関係を示せ
    また，速度vと移動量sの関係を示せ

斜面を転がる球

- 転がる加速度を求めたい
  - v とω，v とs の関係

    $v = a\omega, \quad v = \dot{s}$

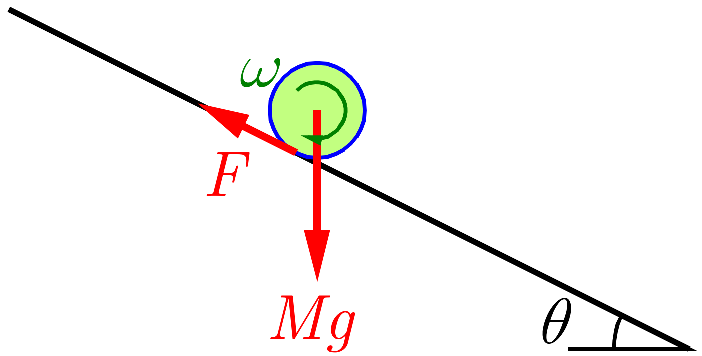


- 物体の運動（第11回：質点系）
  - 重心の運動
  - 重心に相対的な運動（重心まわりの回転運動）

    に分けて考えることができる

- まず，重心まわりの回転を考える
  - 球を回転させている直接の力は何か

斜面を転がる球

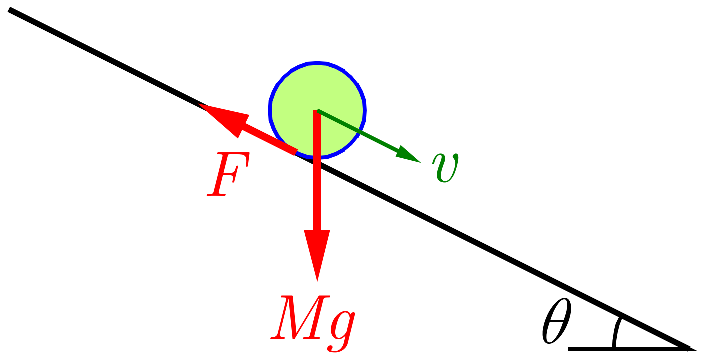


- 球を回転させている力
  - 球と斜面の間の摩擦力
  - 滑りはないので静止摩擦力
- 静止摩擦力：F とする
  - 球：半径a，角速度ω
    重心まわりの慣性モーメント　$I_{\mathrm{G}} = \dfrac{2}{5}Ma^2$
  - 重心まわりの回転に関する運動方程式を示せ
    - ・角運動量の時間微分 ＝ 力のモーメント

斜面を転がる球

- 重心まわりの回転に関する運動方程式

$$I_{\mathrm{G}}\dot{\omega} = Fa$$

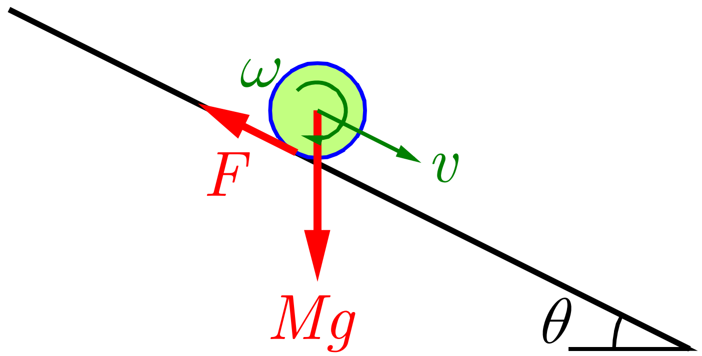


- 物体の運動（第11回：質点系）
  - 重心の運動
  - 重心に相対的な運動（重心まわりの回転運動）

  に分けて考えることができる

- 球の重心に関する運動方程式を示せ
  - 球の質量M，重心の速度v

斜面を転がる球



- 重心に関する運動方程式

$$M\dot{v} = Mg\sin\theta - F$$

- 重心まわりの回転に関する運動方程式

$$I_{\mathrm{G}}\dot{\omega} = Fa$$

- 速度v と角速度ω，速度v と移動量s の関係

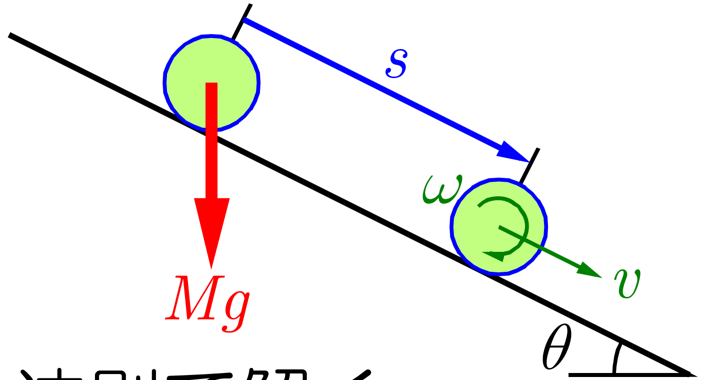
$$v = a\omega, \quad v = \dot{s}$$

- ３式より，球が転がる加速度 $\dot{v} = \ddot{s}$ ，球と斜面の間の静止摩擦力F を求めよ

斜面を転がる球(エネルギー)

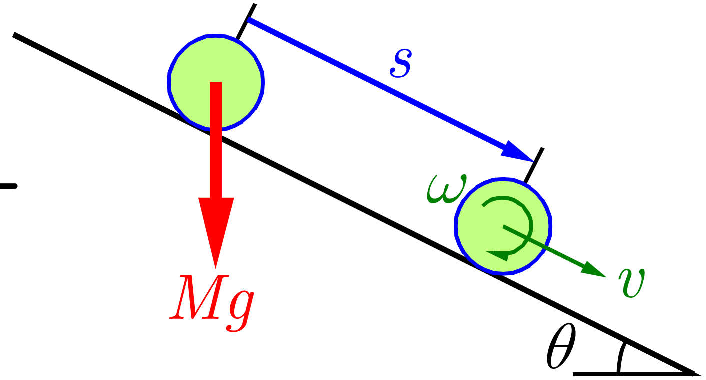
- 転がる加速度を求めたい
  - 球：質量M
    半径a

$$I_{\mathrm{G}} = \frac{2}{5}Ma^2$$



- 同じ問題をエネルギー保存の法則で解く
  - 静止した状態で手を離し，斜面に沿ってs 移動
    - 移動後の重心の速度をv，角速度をωとする
  - 運動エネルギー ＝ 重心のE ＋ 重心まわりのE
  - 移動前の運動エネルギーはゼロ
  - 移動後の運動エネルギーK を求め，v のみで表せ

斜面を転がる球(エネルギー)



- 転がる加速度を求めたい
  - 移動後の点の位置エネルギー

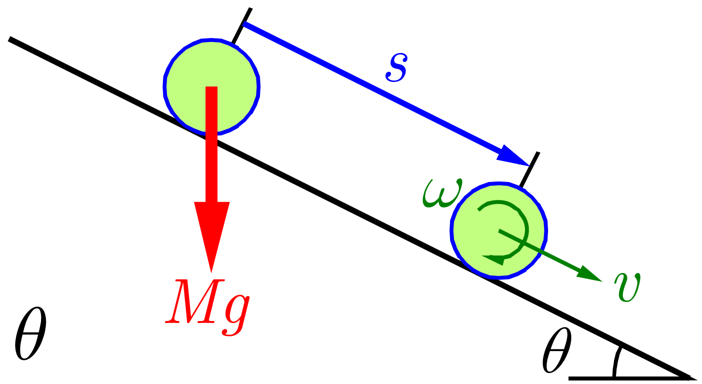
$$U = -Mgs\sin\theta$$

  - 移動後の運動エネルギー

$$K = \frac{7}{10}Mv^2$$

  - エネルギー保存の法則より，両者の関係を示せ
  - 球と斜面の間に摩擦力が働いているのに
エネルギー保存の法則が成り立つ理由を考えよ

斜面を転がる球(エネルギー)



- 転がる加速度を求めたい
  - U とK の関係

$$0 + 0 = \frac{7}{10} M v^2 - M g s \sin\theta$$

$$\therefore \frac{7}{10} M v^2 = M g s \sin\theta$$

- エネルギー保存の法則が成り立つ理由
  - 摩擦力はあるが，滑りがないので仕事はゼロ
- 上の式を時間微分して転がる加速度を求めよ
  - $v = \dot{s}$ に注意

第14回の内容

- 剛体の運動
  - 例題：フィギュアスケートのスピン
  - 例題：球突きの問題
- 相対運動
  - 平行移動する座標系
  - 座標変換
  - 回転する座標系
  - コリオリ力，地球表面近くでの運動

フィギュアスケートのスピン

- スピンの最中に姿勢を変えると回転速度が変わるのはなぜか？

http://www.procreo.jp/labo.html

  - 姿勢を変えると慣性モーメントが変わる
  - 外力を受けない状態では角運動量は変化しない
    ∵角運動量保存の法則
  - 角運動量が一定となるよう角速度が変わる
  - 例題：慣性モーメントI，角速度ωでスピンするスケーターの角運動量L はいくらか

フィギュアスケートのスピン

- 慣性モーメントI，
角速度ωでスピンする
スケーターの角運動量L

$$L = I\,\omega$$

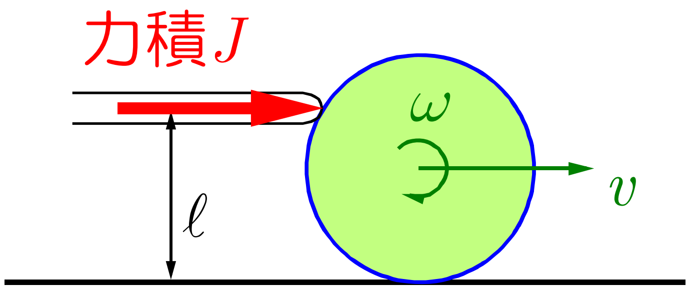
http://www.procreo.jp/labo.html

  - 姿勢を変えて
（手足を上下に伸ばして）
慣性モーメントを半分にしたとき，
角速度はどう変化するか？
  - また，姿勢変化の前後で
運動エネルギーはどのように変化するか？

球突き(ビリヤード)の問題

- 滑らかな床に置かれた球を水平に突く
  - 球の質量：M
  - 球の半径：a
  - 打点の高さ：ℓ
  - キューが与える打撃力：F
  - 打撃力の力積：$J = F \cdot \Delta t$ ($\Delta t \ll 1$)

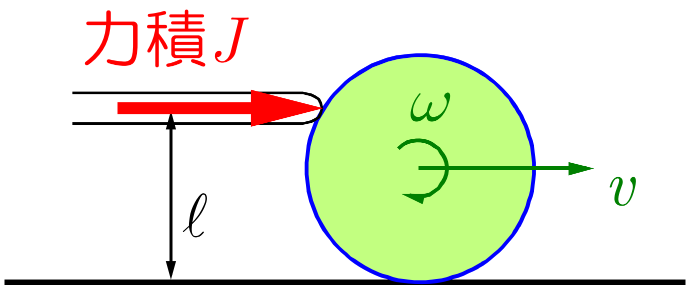
$$I_{\mathrm{G}} = \frac{2}{5} M a^2$$



- まずは，重心の運動を考える
  - 打撃後の球の速度v を求めよ

球突き(ビリヤード)の問題

- 滑らかな床に置かれた球を水平に突く
  - 重心の運動



$$Mv = J \;\rightarrow\; v = \frac{J}{M}$$

$\because$ 運動量と力積は同等

- 続いて，重心まわりの回転を考える
  - 角運動量：運動量のモーメント
    - ・位置ベクトルと運動量ベクトルの外積
  - 角運動量と力積の関係は？

球突き(ビリヤード)の問題

- 角運動量と力積の関係
  - 角運動量：運動量のモーメント
  - 運動量と力積は同等

  ⇨ 角運動量は力積のモーメント（角力積）と同等

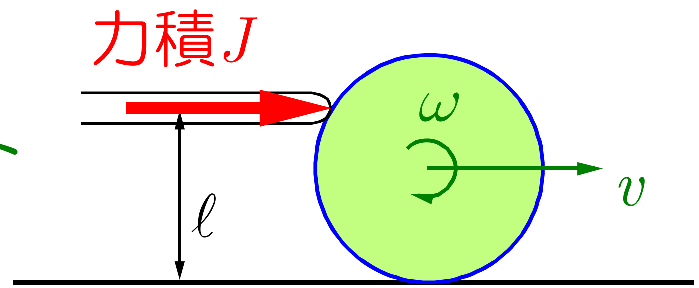
  - 角運動量の時間微分 ＝ 力のモーメント

    ⇩ 時間積分

  - 角運動量 ＝ 力のモーメントの時間積分
力の時間積分のモーメント
力積のモーメント（角力積）

球突き(ビリヤード)の問題

- 滑らかな床に置かれた球を水平に突く
  - 重心まわりの回転
  - 角運動量 ＝ 力積のモーメント
    - ・力積 × 腕の長さ



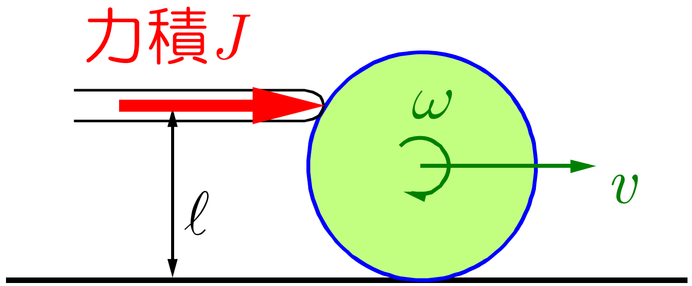
- 打撃後の球の角速度ωを求めよ
  - 球の質量：M
  - 球の半径：a
  - 打点の高さ：ℓ
  - 打撃力の力積：J

$$I_{\mathrm{G}} = \frac{2}{5} M a^2$$

球突き(ビリヤード)の問題

- 滑らかな床に置かれた球を水平に突く
  - 重心の運動

$$Mv = J \to v = \frac{J}{M}$$



  - 重心まわりの回転

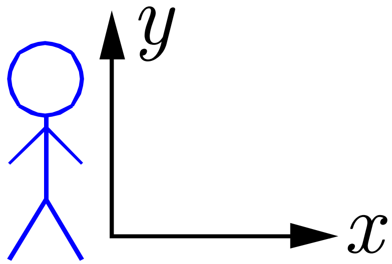
$$I_{\mathrm{G}}\omega = J(\ell - a) \to \omega = \frac{J(\ell - a)}{I_{\mathrm{G}}}$$

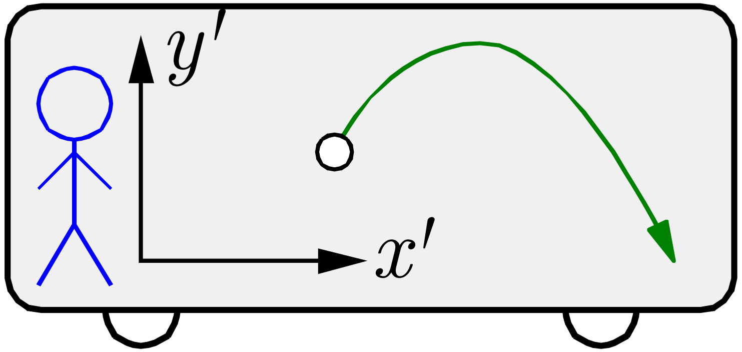
- 球が滑らずに転がるためには
打点の高さℓをいくらにすればよいか？

相対運動

- 異なる視点（座標系）でみた物体の運動
  - たとえば，電車の中で投げられたボール
    - 電車の中で観測した動き
    - 地面に立って外から観測した動き

  どのような差が生じるか





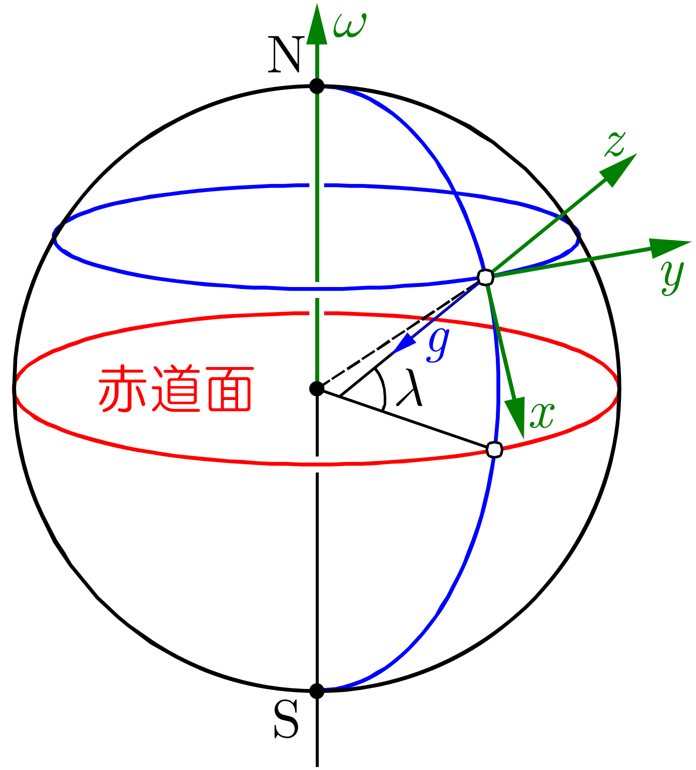
相対運動

- 異なる視点（座標系）でみた物体の運動
  - たとえば，地球上のものの動き
    - 地上から見たとき
    - 地球の外から見たとき

    どのような差が生じるか

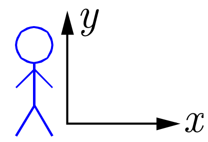
  - 地球上では自転による見かけ上の力が発生する
    - コリオリ力

    どのように記述されるか

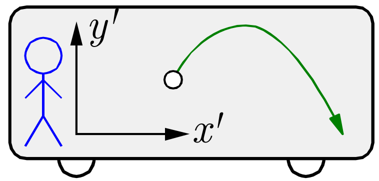


相対運動

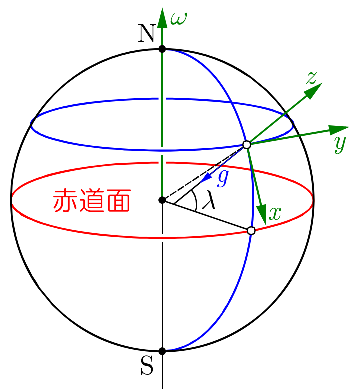
- 異なる視点（座標系）でみた物体の運動



  - 電車の中で投げられたボール



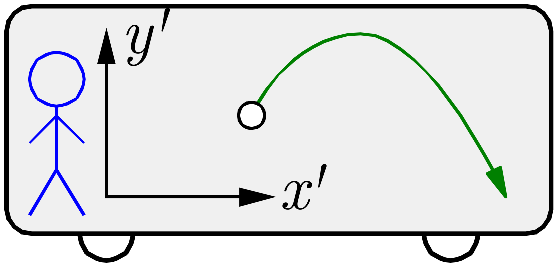
    - 電車の中で観測した動き
    - 地面に立って外から観測した動き
  - 地球上のものの動き



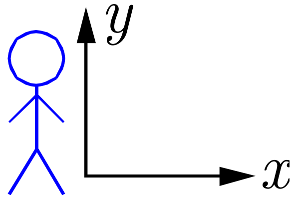
    - 地上から見たとき
    - 地球の外から見たとき
- 基準となる座標系を考える必要がある
  - 慣性系：ニュートンの運動法則が成り立つ座標系

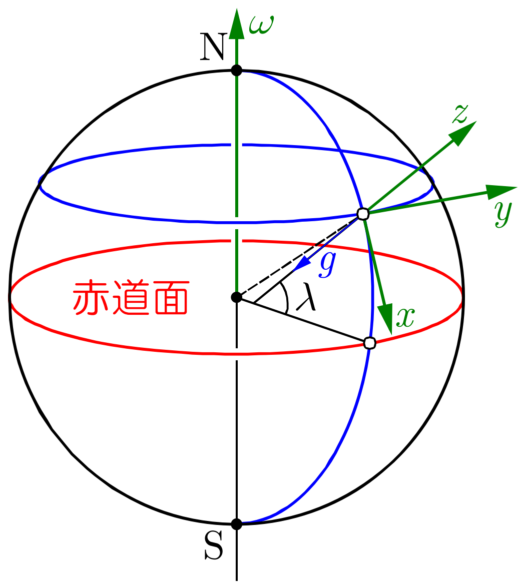
慣性系

- ニュートンの運動法則がそのまま成り立つ座標系
  - 静止している座標系



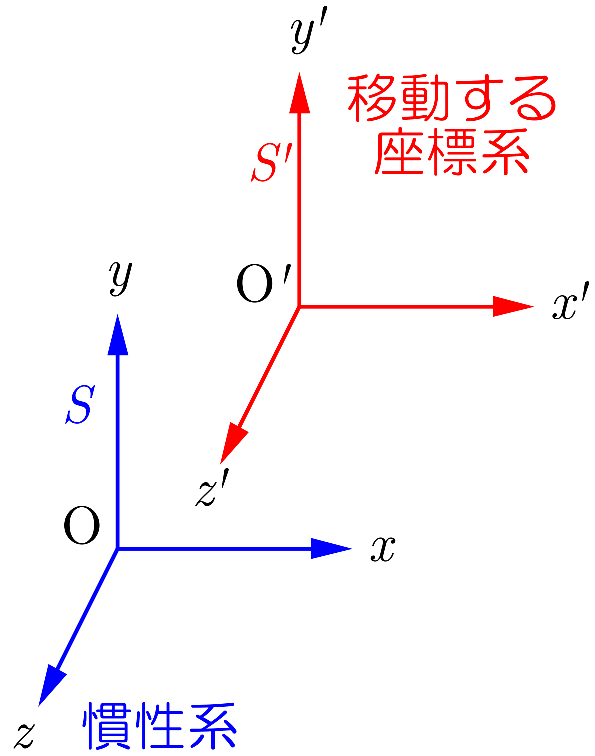
- これを基準として
  運動している座標系
  を考える
  - 平行移動する
    （回転しない）座標系
  - 回転座標系





平行移動する(回転しない)座標系

- ふたつの座標系
  - 慣性系：S 系
    - 原点：O
    - 座標：$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$
  - 平行移動する座標系：S' 系
    - 原点：O$'$
    - 座標：$\boldsymbol{r}' = (x',\ y',\ z')$
  - S から見たS' の原点O$'$ の座標：$\boldsymbol{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$



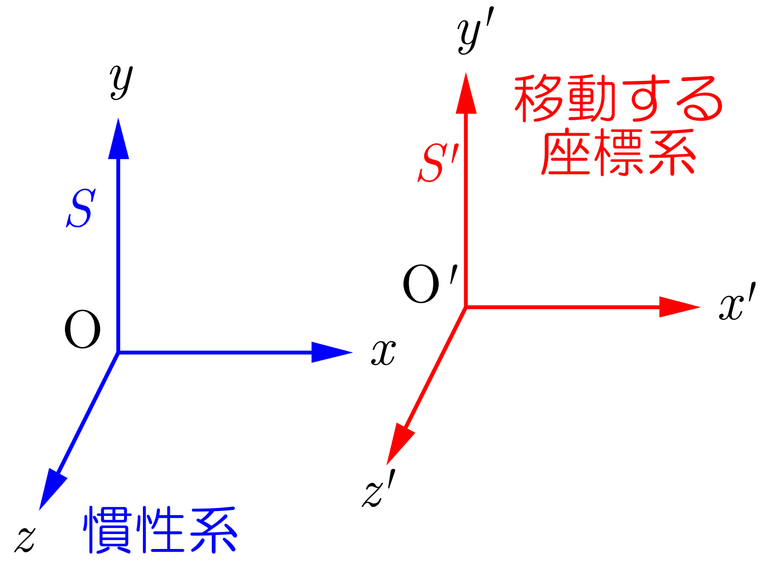
- 両者（$\boldsymbol{r}$ と$\boldsymbol{r}'$）の関係を示せ

平行移動する（回転しない）座標系

- ふたつの座標の関係

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'$$

  - 慣性系S：$\boldsymbol{r}$
  - 移動する座標系S' ：$\boldsymbol{r}'$
  - S から見たO$'$ ：$\boldsymbol{r}_0$



- 慣性系：ニュートンの運動法則が成り立つ

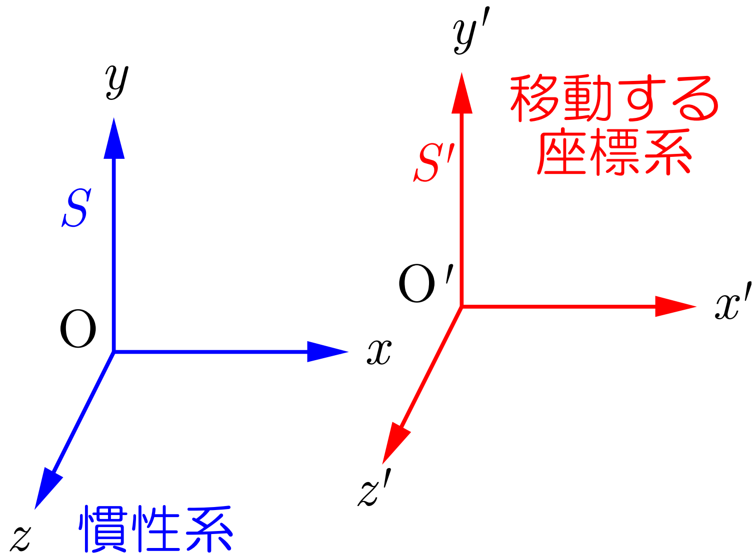
$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

  - 移動する座標系S' から見たときの運動は どのように表されるか？

平行移動する(回転しない)座標系

- S' から見たときの運動

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_0 + \ddot{\boldsymbol{r}}'\right) = \boldsymbol{F}$$



- 移項して

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$$

- 右辺の $-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ は見かけ上の力なので $\boldsymbol{F}'$ とおく

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}'$$

- $\boldsymbol{F}'$：見かけ上の力であり，慣性力と呼ばれる

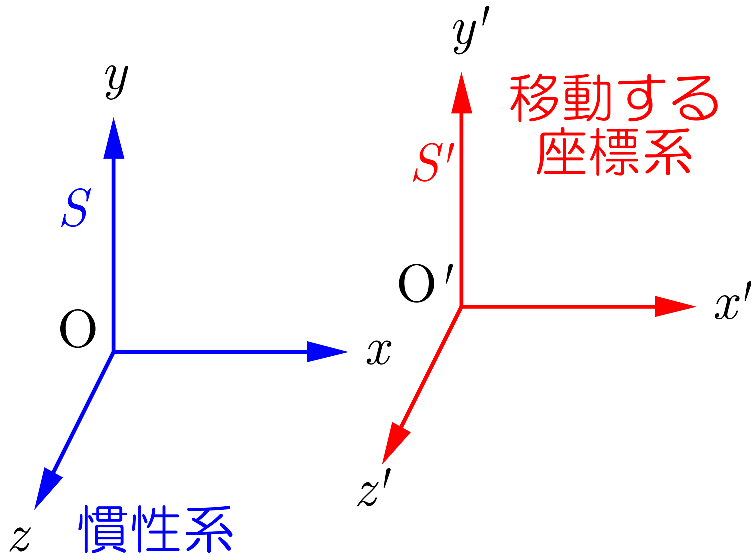
平行移動する(回転しない)座標系

- 慣性系から見た運動

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

- 平行移動する座標系S'から見たときの運動

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}'$$



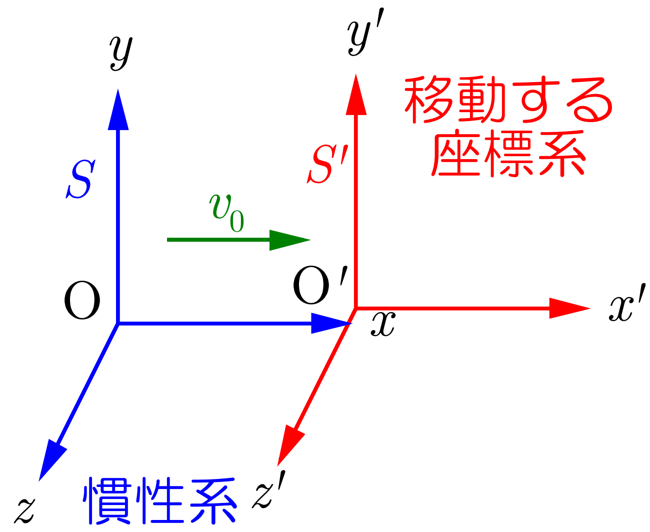
- 慣性系に対して加速度運動している座標系では慣性力が現れ，これを加えればニュートンの運動方程式が成立する

平行移動する(回転しない)座標系

- 相対速度が一定の場合

$$\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \text{一定}$$

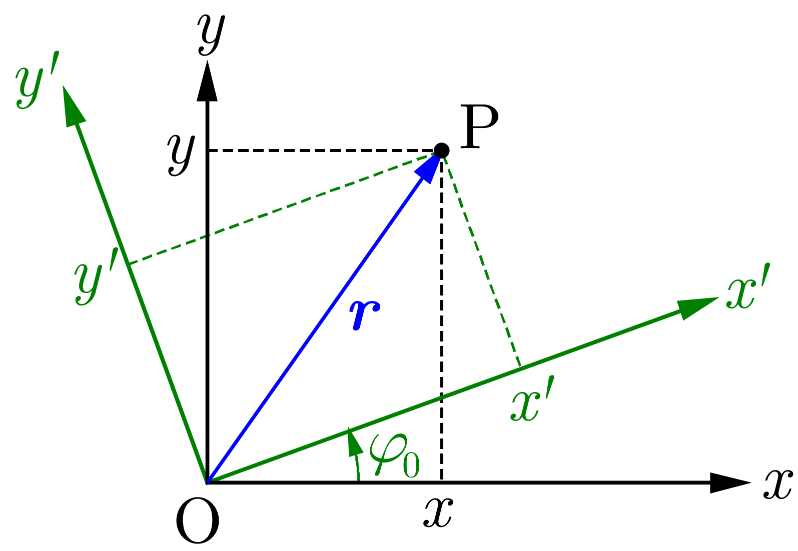
  - 相対加速度： $\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{0}$
  - 慣性力： $\boldsymbol{F}' = -m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{0}$
  - S' から見たときの運動： $m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F}$



- ガリレイの相対性原理
  - ひとつの慣性系に対して等速度で動く座標系はやはり慣性系である

回転座標系を考える前に

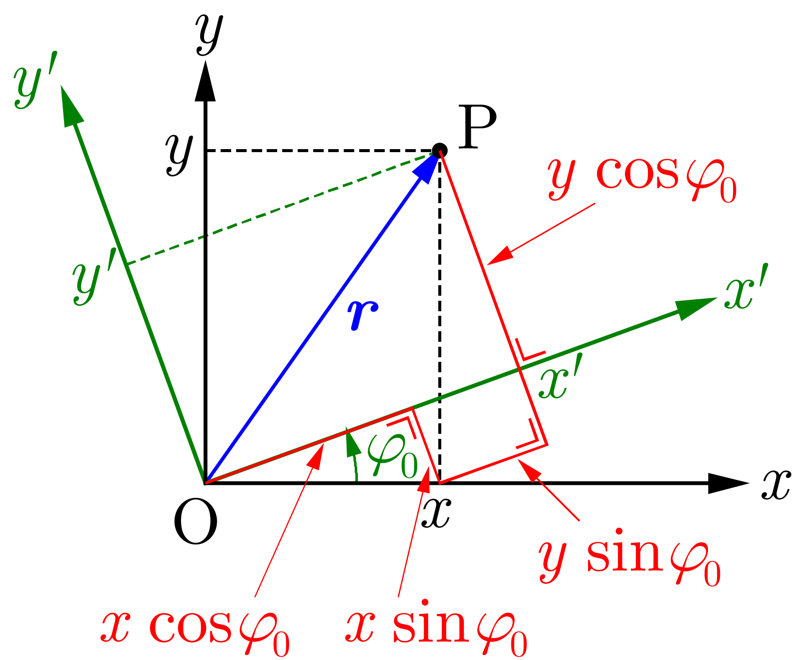
- 座標変換
  - 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される点P をふたつの座標で見る
  - 座標系S：$\mathrm{P}(x,\ y)$
  - 座標系S'：$\mathrm{P}(x',\ y')$
    - 原点O：共通
    - S' 系は S 系に対しφ_0 傾いている



- $(x,\ y)$と$(x',\ y')$の関係は？
  - 第７回（惑星の運動）ですでにやっている

回転座標系を考える前に

- 座標変換
  - 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される点P をふたつの座標で見る



  - 座標系 S : P$(x,\ y)$
  - 座標系 S' : P$(x',\ y')$
    - 原点O : 共通
    - 座標系 S' は座標系 S に対し φ_0 傾いている

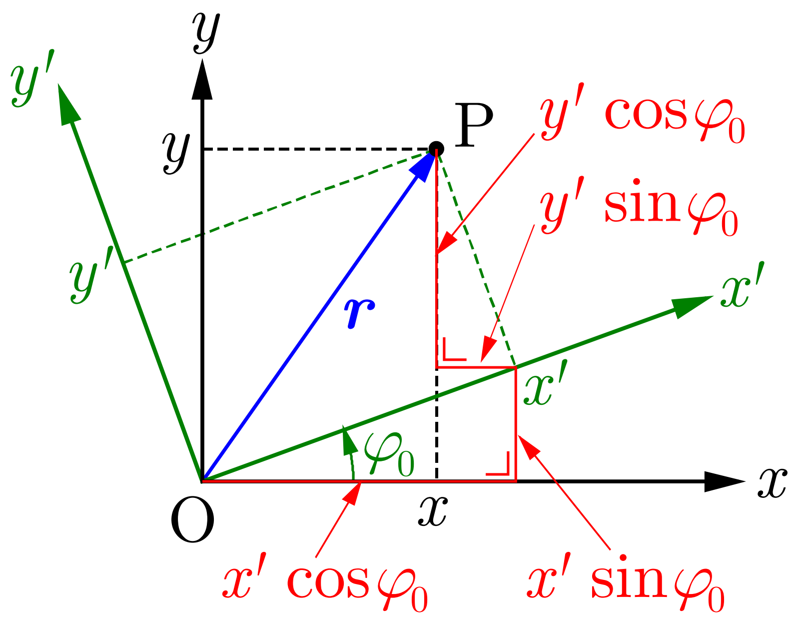
- $(x',\ y')$ を $(x,\ y)$ を用いて表せ
  - $x' = x\cos\varphi_0 + \cdots$

座標変換

- $(x',\ y')$と$(x,\ y)$の関係

$$x' = x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0$$

$$y' = -x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0$$



  - 変換行列$\boldsymbol{A}$ を用いて
次のようにも表せる

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

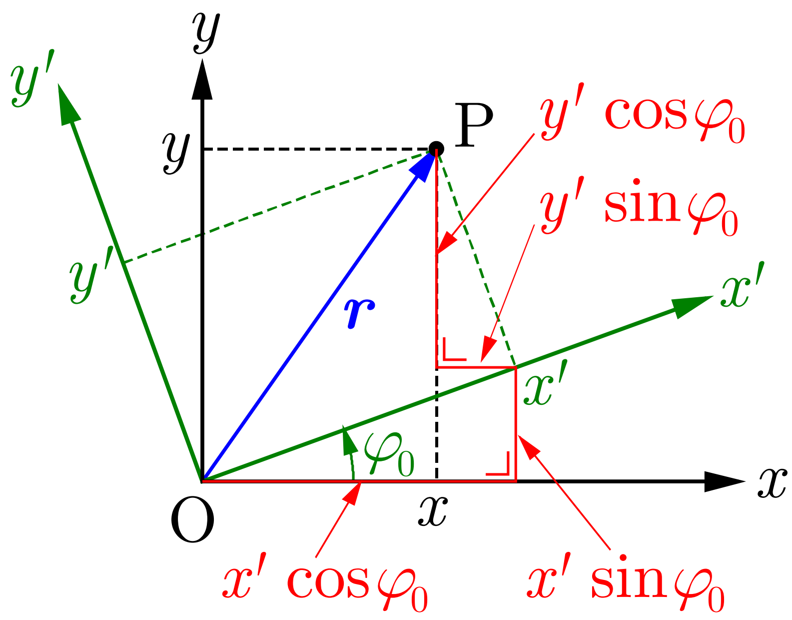
  - 逆に，$(x,\ y)$を$(x',\ y')$を用いて表せ

座標変換

- $(x,\ y)$と$(x',\ y')$の関係

$$x = x' \cos\varphi_0 - y' \sin\varphi_0$$

$$y = x' \sin\varphi_0 + y' \cos\varphi_0$$



  - 変換行列$\boldsymbol{A}'$を用いて次のようにも表せる

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A}' \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

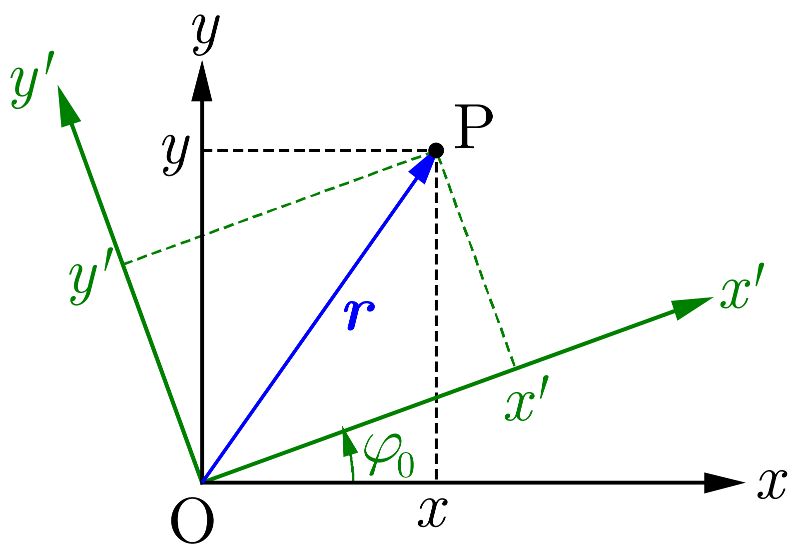
  - 変換行列$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{A}'$…

座標変換

- $(x,\ y)$と$(x',\ y')$の関係

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A}' \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

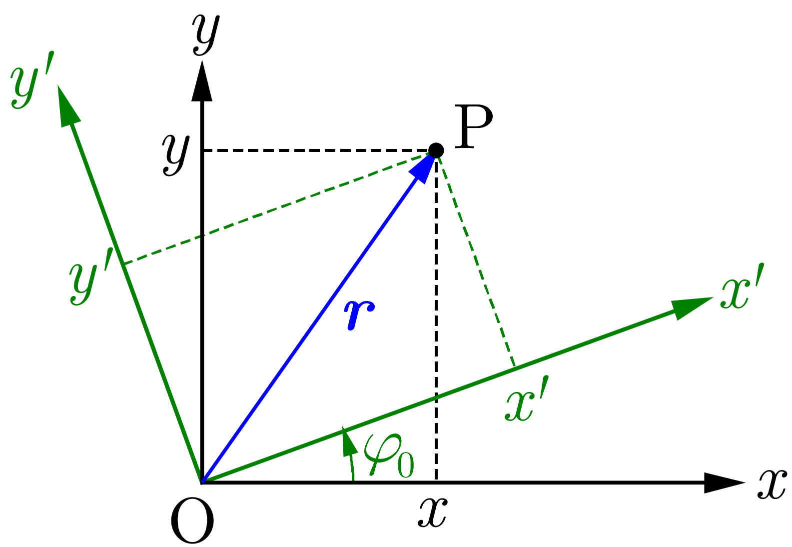
- 変換行列$\boldsymbol{A}$ と$\boldsymbol{A}'$ の関係を２点挙げよ

座標変換

● 変換行列$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{A}'$の関係

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$



1．転置行列（行と列を入れ替えた行列）：$\boldsymbol{A}' = {}^{t}\boldsymbol{A}$

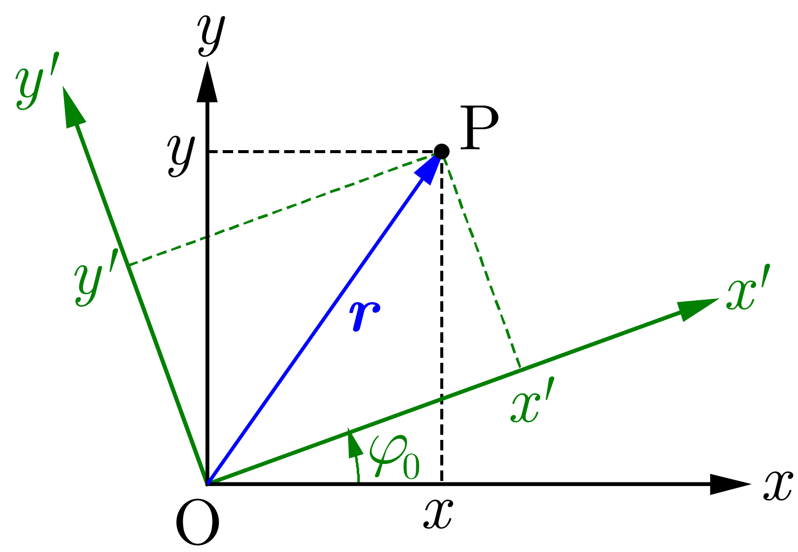
2．逆行列：$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$

• 直交行列：転置行列と逆行列が等しい行列

座標変換

- 変換行列$\boldsymbol{A}$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

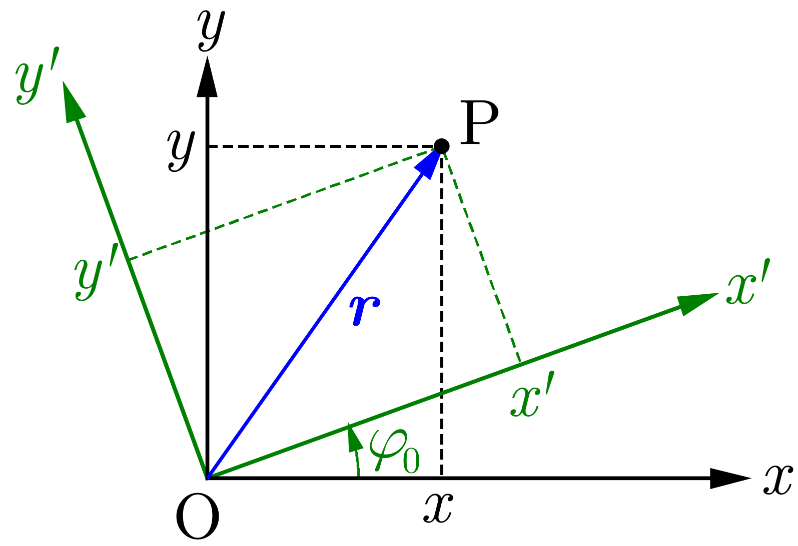


- S 系の座標値$(x,\ y)$を
  S'系の座標値$(x',\ y')$に変換する行列
- 座標系を左回りにφ_0 回転させる行列
- 観測者の視点（座標系）がφ_0 だけ回転したら
  見え方はどう変わるか，を表している
  - 点Pが右回りにφ_0 回転したように見える

座標変換

- 変換行列$\boldsymbol{A}'$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{A}' \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$



- S'系の座標値$(x',\ y')$ を
  S 系の座標値$(x,\ y)$に変換する行列

- $\boldsymbol{A}'$：座標系を右回りにφ_0 回転させる行列
  座標系を左回りに$-\varphi_0$ 回転させる行列

  ⇕ 逆行列：互いに逆変換を表す

- $\boldsymbol{A}$ ：座標系を左回りにφ_0 回転させる行列

座標変換

- 変換行列$\boldsymbol{A}$をφ_0（左回り正）の関数として表す

$$\boldsymbol{A}(\varphi_0) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

  - $\boldsymbol{A}(\varphi_0)$ の逆行列は次のように表せる

$$\boldsymbol{A}(-\varphi_0) = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi_0) & \sin(-\varphi_0) \\ -\sin(-\varphi_0) & \cos(-\varphi_0) \end{bmatrix}$$

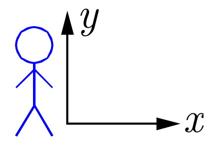
$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}'$$

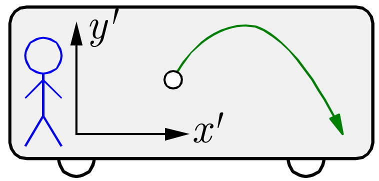
第15回の内容

- 相対運動
  - 平行移動する座標系
  - 座標変換
  - 回転する座標系
  - コリオリの力
  - 地球上での自転によるコリオリの力

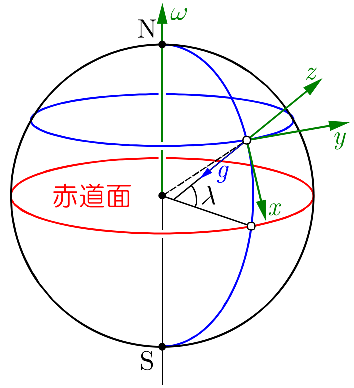
相対運動

- 異なる視点（座標系）でみた物体の運動





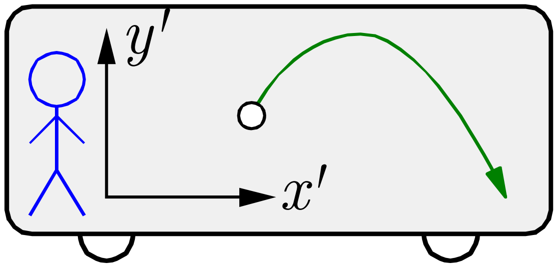
  - 電車の中で投げられたボール
    - 電車の中で観測した動き
    - 地面に立って外から観測した動き
  - 地球上のものの動き
    - 地上から見たとき
    - 地球の外から見たとき



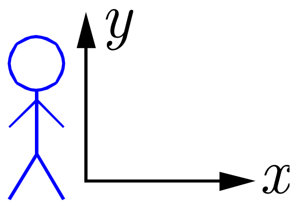
- 基準となる座標系を考える必要がある
  - 慣性系：ニュートンの運動法則が成り立つ座標系

慣性系

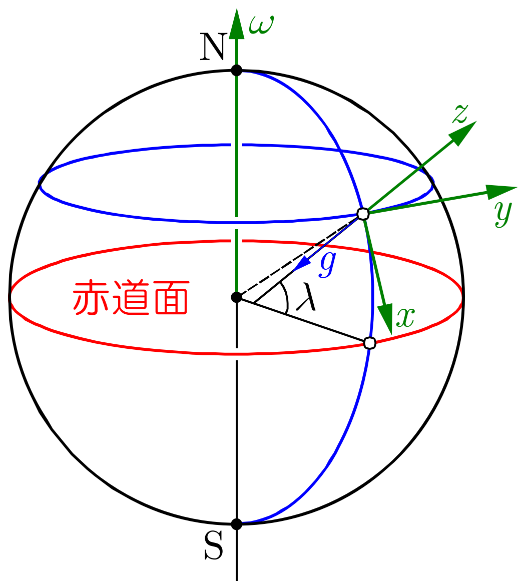
- ニュートンの運動法則がそのまま成り立つ座標系
  - 静止している座標系



- これを基準として運動している座標系を考える

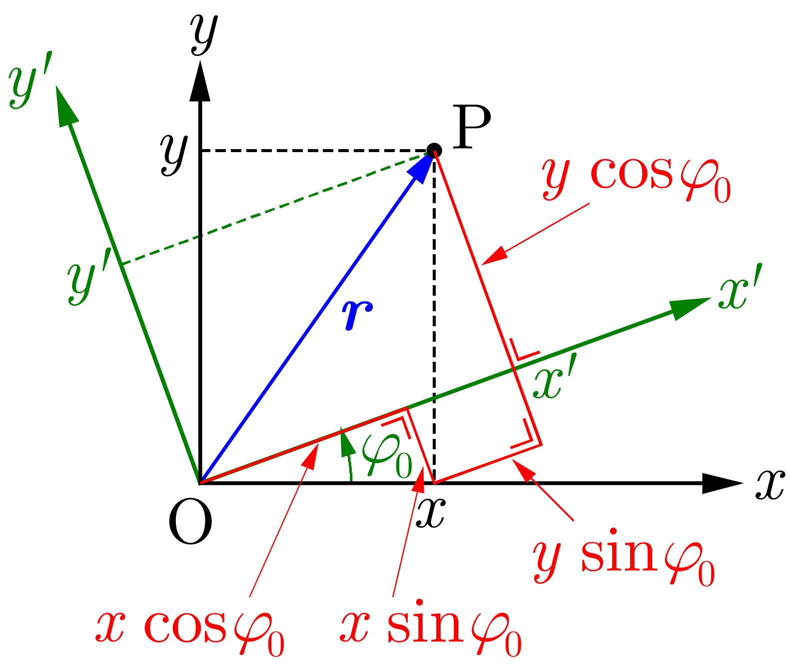


  - 平行移動する（回転しない）座標系
  - 回転座標系



回転座標系を考える前に

- 座標変換
  - 位置ベクトル$\boldsymbol{r}$
    で表される点P
    をふたつの座標で見る
  - 座標系S：P$(x,\ y)$
  - 座標系S'：P$(x',\ y')$
    - 原点O：共通
    - 座標系S' は座標系S に対しφ_0 傾いている



  - $(x',\ y')$を$(x,\ y)$を用いて表せ
    - $x' = x\cos\varphi_0 + \cdots$

座標変換

- $(x',\ y')$と$(x,\ y)$の関係

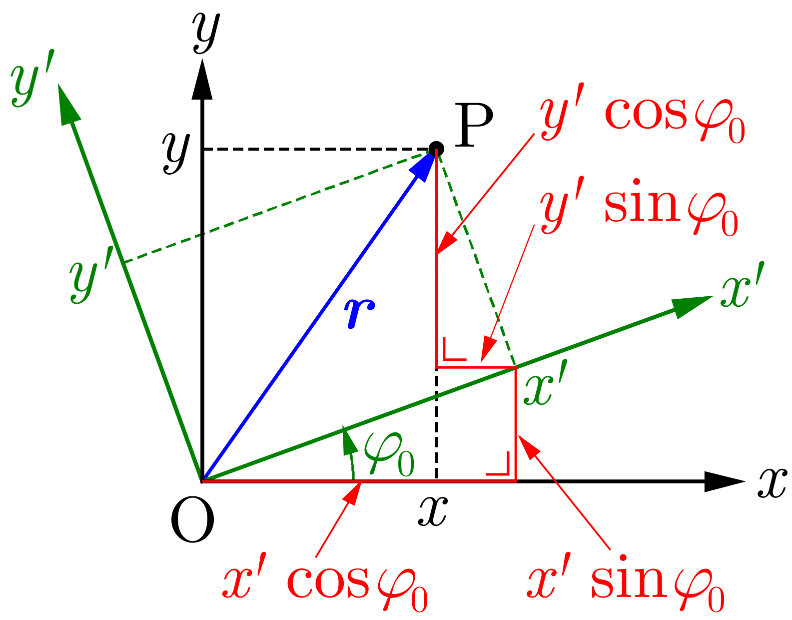
$$x' = x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0$$

$$y' = -x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0$$

- $(x,\ y)$と$(x',\ y')$の関係

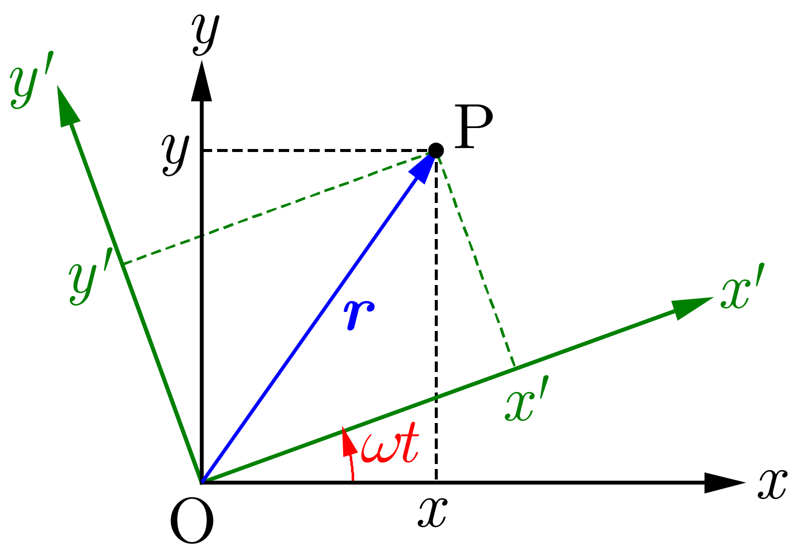
$$x = x'\cos\varphi_0 - y'\sin\varphi_0$$

$$y = x'\sin\varphi_0 + y'\cos\varphi_0$$



回転する座標系(2次元)

- 質点Pの運動を
  ふたつの座標系から見る
  - 慣性系：S 系
    - 座標：$\boldsymbol{r} = (x,\ y)$
  - 回転する座標系：S' 系
    - 座標：$\boldsymbol{r} = (x',\ y')$
    - 時刻 $t = 0$ でS 系と一致
    - 原点Oを中心に一定の角速度ωで回転



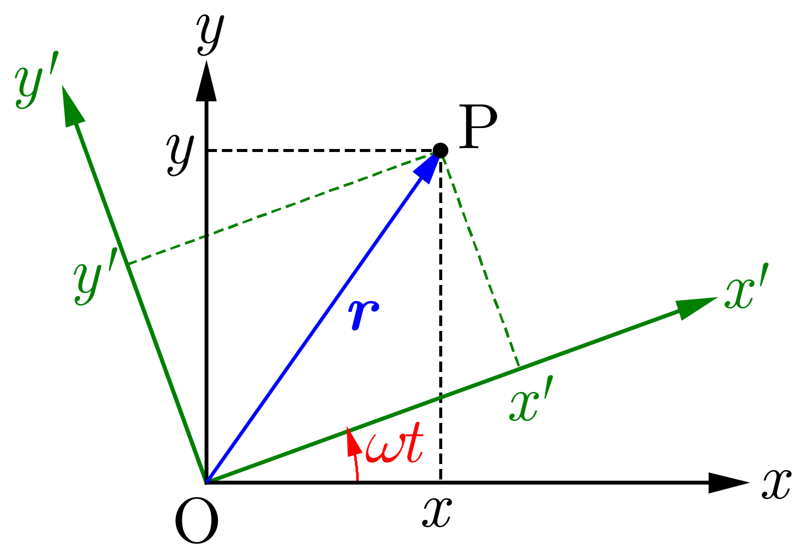
- S 系から見たPの位置$(x,\ y)$を，
  S' 系から見たPの位置$(x',\ y')$を用いて表せ

回転する座標系(2次元)

- 質点Pの運動

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$

$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$



- S 系から見た運動方程式

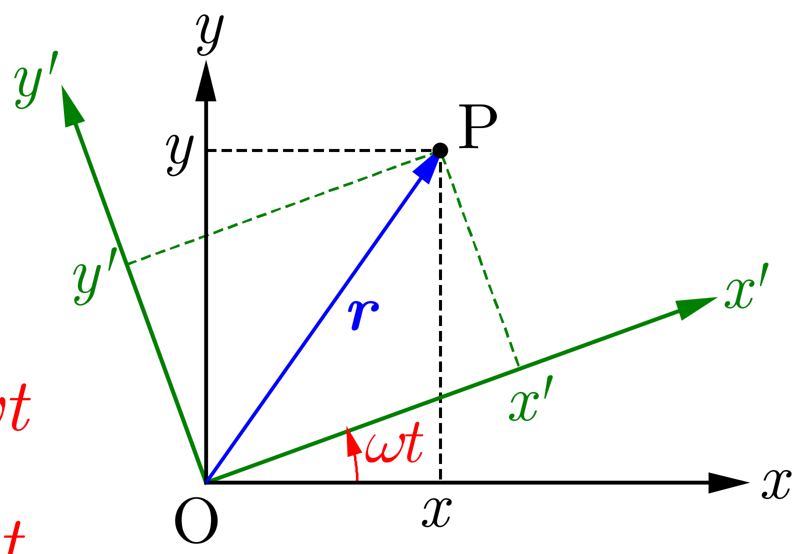
$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y$$

- これを$(x',\, y')$を使って表せば,
  S' 系から見た運動を示す式となる

- 上式の$(x,\, y)$を時間微分して，速度の式を表せ

回転する座標系（2次元）

- S 系から見たPの位置 $(x,\, y)$を時間微分
  - S 系から見たPの速度

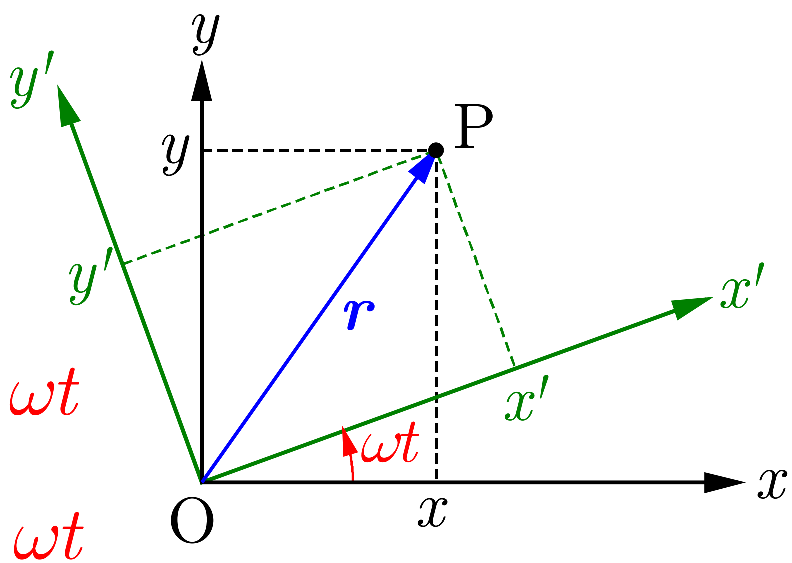


$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega t - \omega x' \sin \omega t$$
$$-\dot{y}' \sin \omega t - \omega y' \cos \omega t$$
$$\dot{y} = \dot{x}' \sin \omega t + \omega x' \sin \omega t$$
$$+\dot{y}' \cos \omega t + \omega y' \cos \omega t$$

- さらに時間微分して，加速度の式を示せ

回転する座標系(2次元)

- S 系から見たPの速度 $(\dot{x},\,\dot{y})$を時間微分
  - S 系から見たPの加速度



$$\ddot{x} = \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\cos\omega t$$
$$-\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t$$

$$\ddot{y} = \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\sin\omega t$$
$$+\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\cos\omega t$$

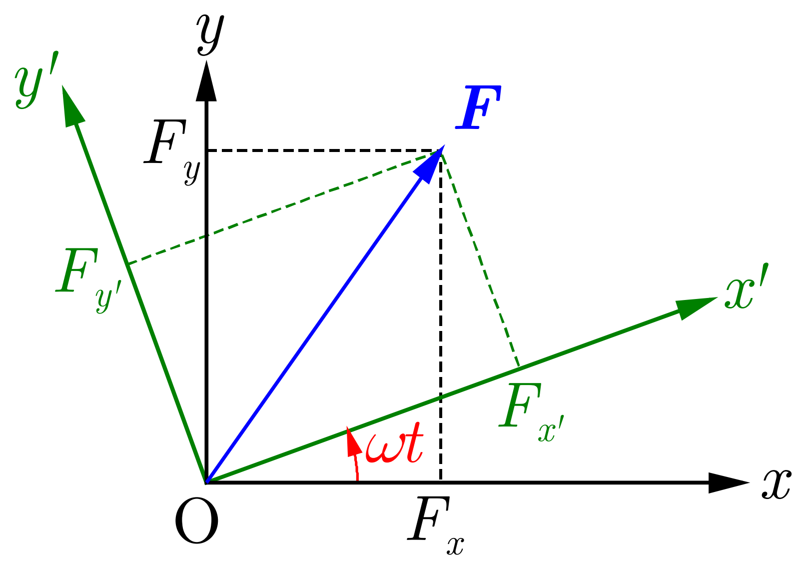
- 続いて，運動方程式の右辺（外力）を考える

回転する座標系(2次元)

- 質点Pの運動

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$

$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$



- S 系から見た運動方程式

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y$$

- (F_x, F_y)：S 系から見た，質点Pに働く外力

- S' 系から見た外力を$(F_{x'}, F_{y'})$ として，
  (F_x, F_y)を$(F_{x'}, F_{y'})$ を用いて表せ

回転する座標系(2次元)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases}$$

- 質点Pの加速度

$$\ddot{x} = \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\cos\omega t - \left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t$$

$$\ddot{y} = \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\sin\omega t + \left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\cos\omega t$$

- 質点Pに働く外力

$$F_x = F_{x'}\cos\omega t - F_{y'}\sin\omega t$$

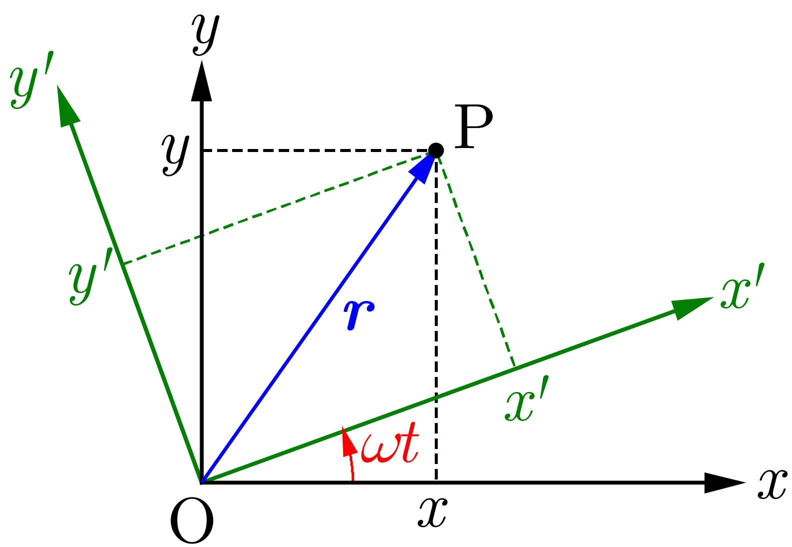
$$F_y = F_{x'}\sin\omega t + F_{y'}\cos\omega t$$

- これらより，S' 系から見た運動方程式を導け

回転する座標系(2次元)

- S' 系から見た運動方程式

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right) = F_{x'} \\ m\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right) = F_{y'} \end{cases}$$



- 移項すると

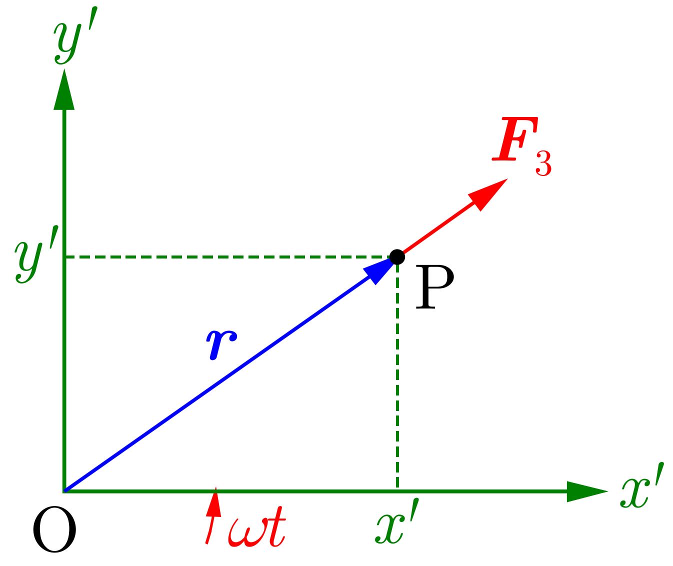
$$\begin{cases} m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \\ m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' \end{cases}$$

- 右辺第２項，第３項は回転による見かけ上の力
  - ・第３項はどの方向の力か？　何を表すか？

回転する座標系(2次元)

- S' 系から見た運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \\ m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' \end{cases}$$



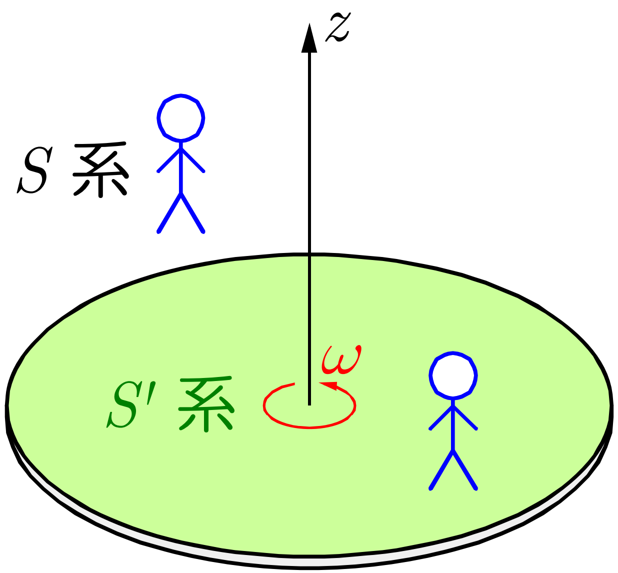
- 右辺第３項：$\boldsymbol{F}_3$とおく

$$\boldsymbol{F}_3 = \left(m\omega^2 x',\ m\omega^2 y'\right) = m\omega^2\left(x',\ y'\right) = m\boldsymbol{r}\omega^2$$

- $\boldsymbol{F}_3$：遠心力
  - 位置ベクトルと同じ向き：中心力
  - 質量×回転半径（中心からの距離）×角速度^2

遠心力

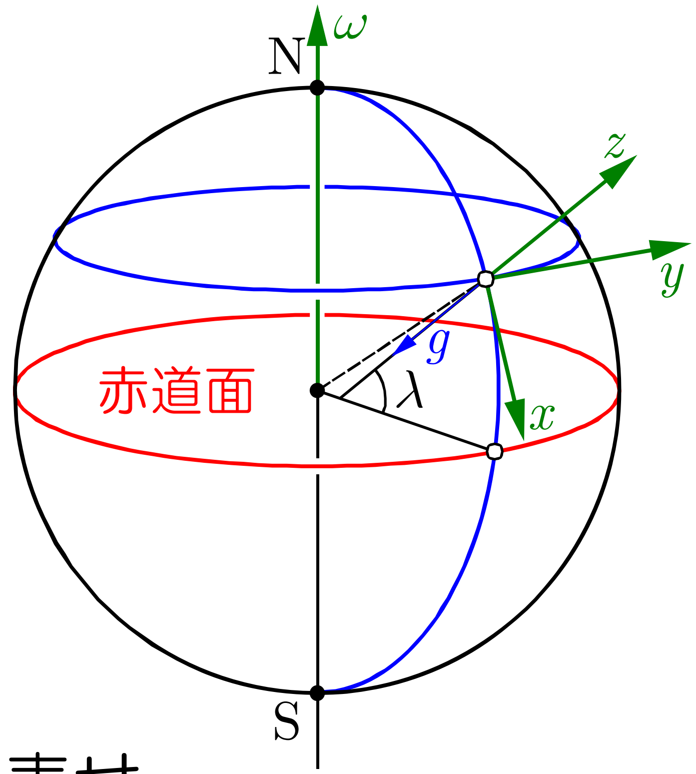
- 回転する円盤上で静止しているひと
  - 慣性系（円盤外）：S 系
  - 円盤上の座標系：S' 系
  - S 系から見れば，
    円盤上のひとは回転している
  - S' 系から見れば，
    その人は静止している
    - ・横向きの力を受けているように感じる：遠心力



- 地球上のひとも自転による遠心力を受けている…

地球上での自転による遠心力

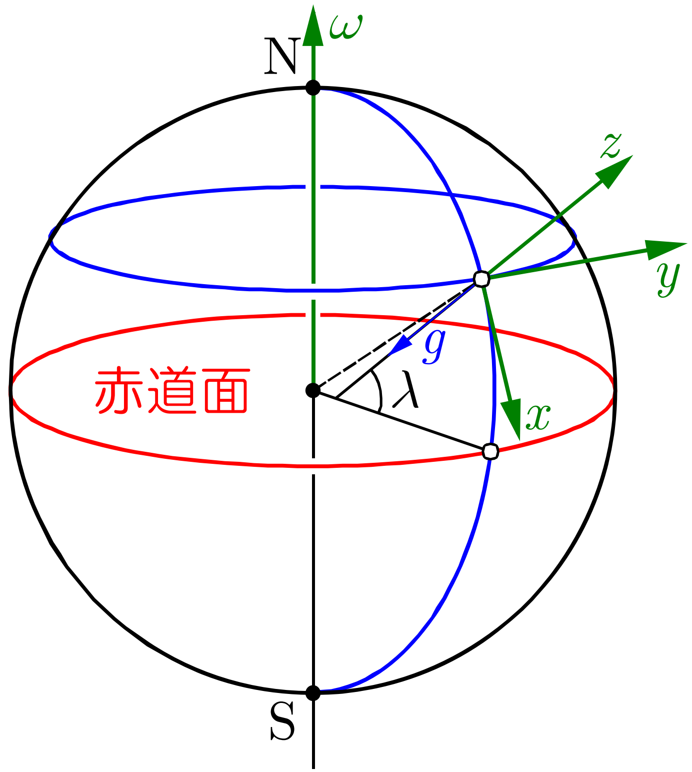
- 赤道における
  遠心力の加速度aを求めよ



- 地球の半径
  - $R = 6378\ \mathrm{km}$
- 自転周期
  - $T = 1$ 日 $= 86400\ \mathrm{s}$
- まず，角速度ωをTを使って表せ
- 加速度aをR，Tを使って表せ
- 加速度aは重力加速度gの何分の1くらいか？

地球上での自転による遠心力

- 赤道における
  遠心力の加速度a を求めよ



- 自転の角速度： $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
- 遠心力： $F = mR\omega^2$
- 加速度： $a = R\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$

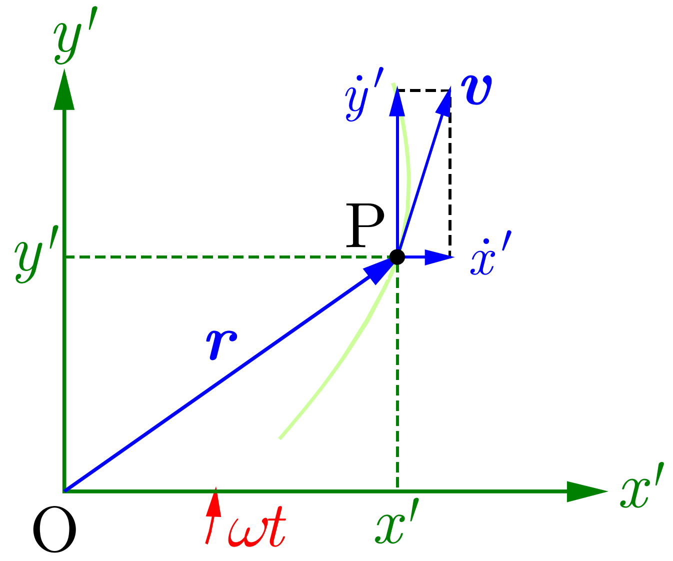
$$= 0.0337\ \mathrm{m/s^2}$$

  - 重力加速度g のおよそ1/300

回転する座標系(2次元)

- S' 系から見た運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \\ m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' \end{cases}$$



- 右辺第２項：$\boldsymbol{F}_2$とおく

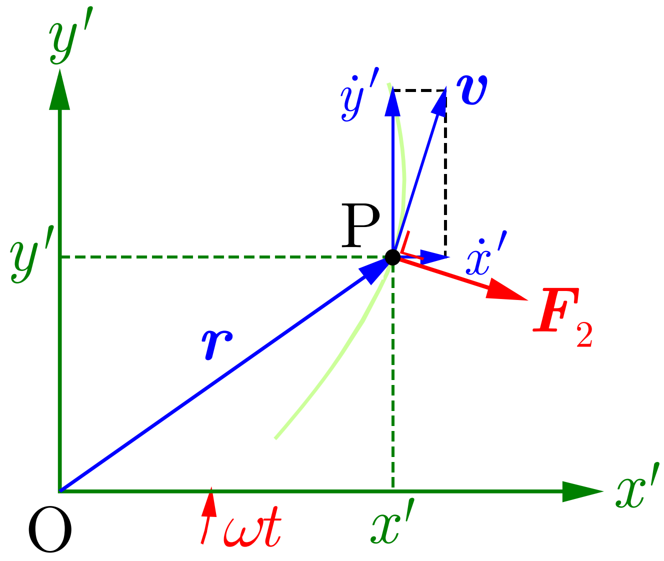
$$\boldsymbol{F}_2 = \left(2m\omega\dot{y}', -2m\omega\dot{x}'\right) = 2m\omega\left(\dot{y}', -\dot{x}'\right)$$

- $\boldsymbol{F}_2$：コリオリの力
  - S' 系から見た速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \left(\dot{x}', \dot{y}'\right)$ に関連
  - その向きは？　$\boldsymbol{F}_2$と$\boldsymbol{v}$ の内積を取ってみよ

コリオリの力

- $\boldsymbol{F}_2$と$\boldsymbol{v}$ の内積

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{v} &= 2m\omega\left(\dot{y}',\,-\dot{x}'\right)\cdot\left(\dot{x}',\,\dot{y}'\right)\\ &= 2m\omega\left(\dot{y}'\dot{x}'-\dot{x}'\dot{y}'\right)\\ &= 0\end{aligned}$$



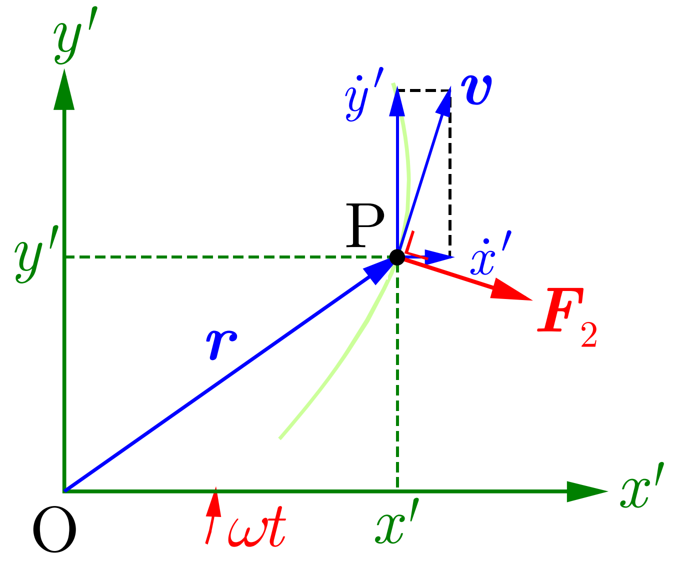
- $\boldsymbol{F}_2$と$\boldsymbol{v}$ は直交している

$$\boldsymbol{F}_2 = 2m\omega\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\end{Bmatrix} = 2m\omega\begin{bmatrix}\cos{}^{\pi}\!/_{2} & \sin{}^{\pi}\!/_{2}\\ -\sin{}^{\pi}\!/_{2} & \cos{}^{\pi}\!/_{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

  - $\boldsymbol{F}_2$の向き：$\boldsymbol{v}$ を右回りに90°回転させた方向

コリオリの力

- $\boldsymbol{F}_2$の向き：速度$\boldsymbol{v}$ を右回りに90°回転させた方向
  - 質点P の進行方向に見て右向きの力



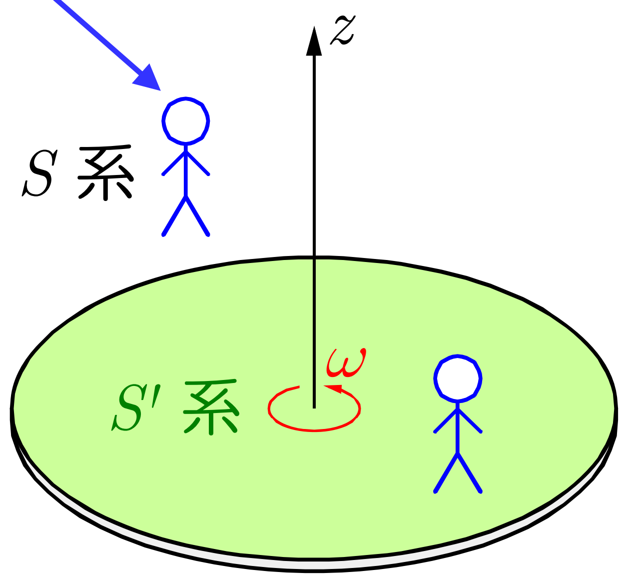
- $\boldsymbol{F}_2$の大きさ

$$\boldsymbol{F}_2 = 2m\omega\left(\dot{y}', -\dot{x}'\right)$$

  - 質点P の質量m，　S' 系の角速度ω に比例
  - S' 系から見た質点P の速度v に比例
    - S' 系に対して静止した物体には働かない

慣性系で静止している物体

- 回転する円盤上から，外に立っている人を見る
  - 慣性系（円盤外）：S 系
  - 円盤上の座標系：S' 系



  - S 系から見れば，
    その人は静止している
  - S' 系から見れば，
    その人は回転している
    - その人は何の力も感じていない
  - その人を質点P に置き換えて，　S' 系から見る$\cdots$

慣性系で静止している物体

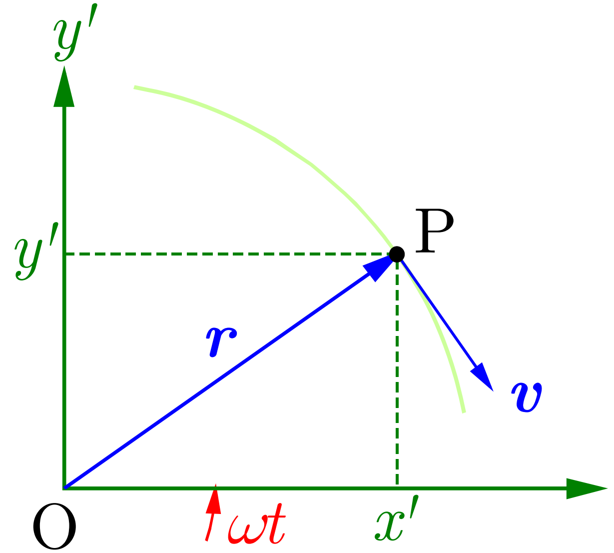
- 回転するS' 系からS 系に対し静止している質点Pを見る

  - S' 系はS 系に対し角速度ωで回転している（左回り）

⇩

  - S' 系から見ると，質点Pは右回りに角速度ωで回転している

  - S' 系から見た質点P の速度v はいくらか



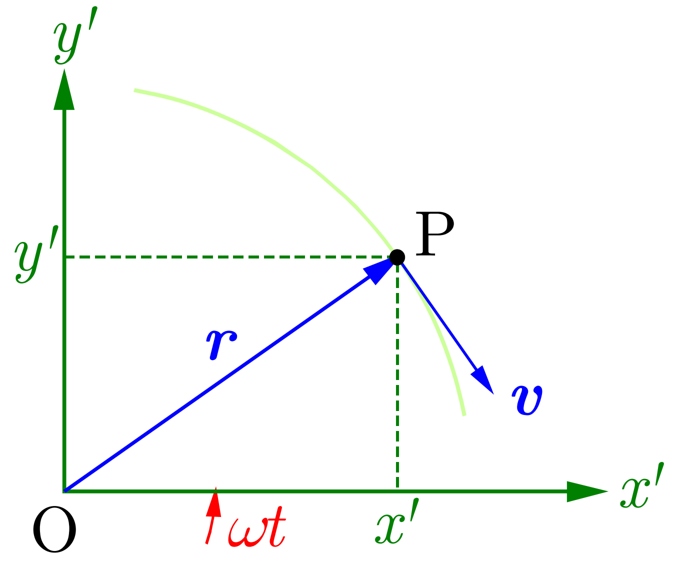
慣性系で静止している物体

- S' 系から見た質点P の速度

$$v = r\omega$$

- S' 系から見た質点P の運動方程式を立てたい

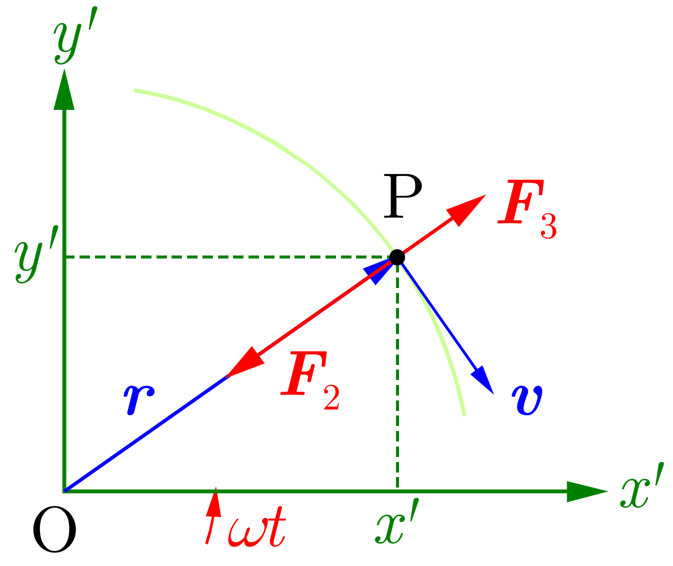
$$\begin{cases} m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \\ m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' \end{cases}$$



  - 外力はゼロ
  - 見かけ上の力を求めよ（向きと大きさ）
    - 遠心力$\boldsymbol{F}_3$とコリオリの力$\boldsymbol{F}_2$

慣性系で静止している物体

- S' 系から見た質点P の運動



  - 遠心力$\boldsymbol{F}_3$
    - 大きさ： $F_3 = mr\omega^2$
    - OP方向（外向き）
  - コリオリの力$\boldsymbol{F}_2$
    - 大きさ： $F_2 = 2m\omega v = 2mr\omega^2 \quad (\because v = r\omega)$
    - 回転中心Oの方向（PO方向）
      - 進行（速度$\boldsymbol{v}$）方向に見て右向き

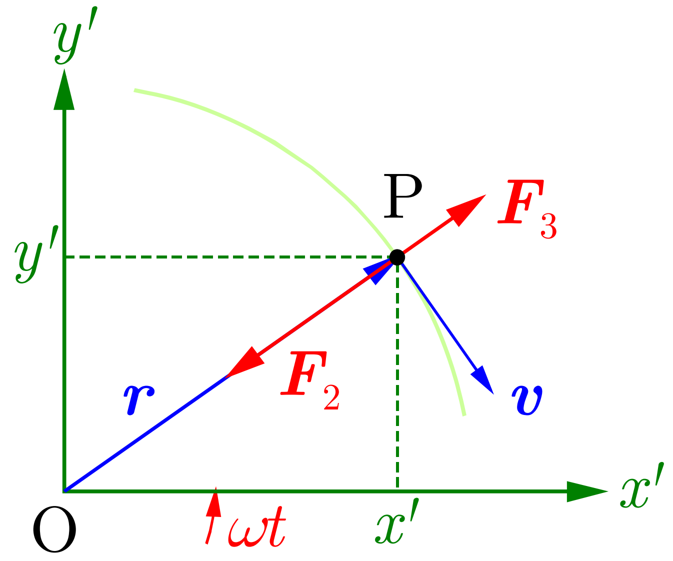
- S' 系から見た質点P の運動方程式を示せ

慣性系で静止している物体

- S' 系から見た質点P の運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = -m\boldsymbol{r}\omega^2$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = -mx'\omega^2 \\ m\ddot{y}' = -my'\omega^2 \end{cases}$$



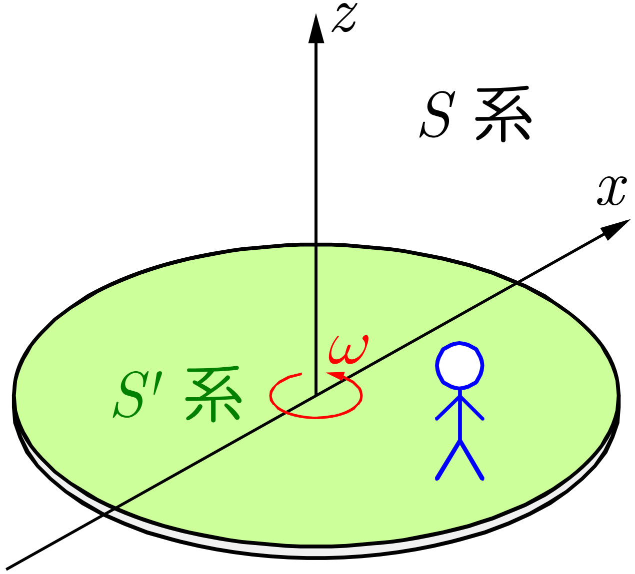
- 見かけ上の外力 ＝ 遠心力$\boldsymbol{F}_3$ ＋ コリオリの力$\boldsymbol{F}_2$
  - 回転中心Oの方向：引力
- この力を向心力として，P は円運動をしている…ように，S' 系からは見える

慣性系を直進する物体

- 質点P：S 系のx 軸上を等速運動している
  - S 系から見た運動
    - 速度をv とすると

$$x = vt$$

$$y = 0$$



  - S' 系から見た
    質点P の位置(x', y')を示せ

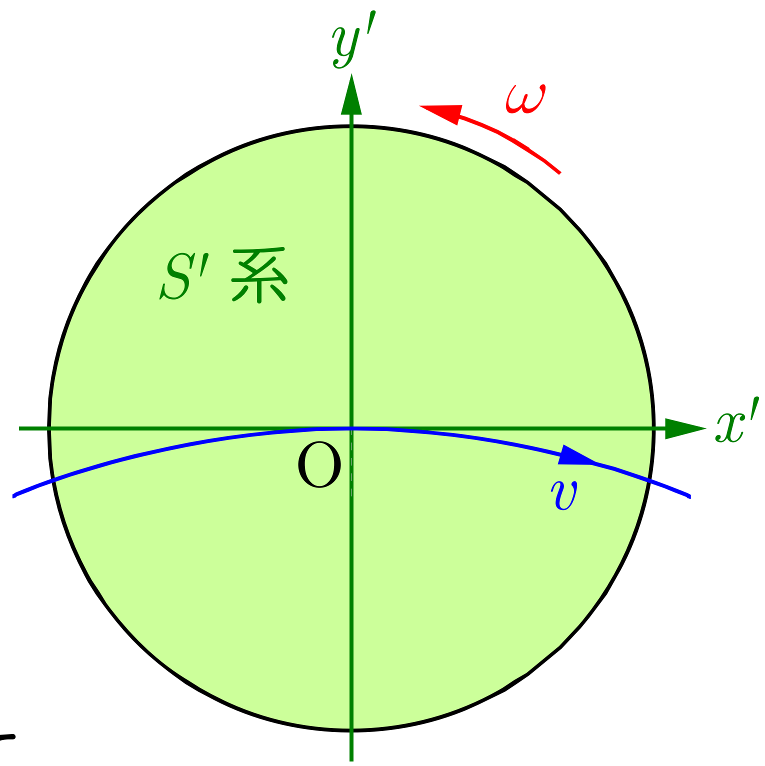
$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t$$

慣性系を直進する物体

- S' 系から見た質点P の運動

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$
$$= vt\cos\omega t$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$
$$= -vt\sin\omega t$$



- 進行（速度$\boldsymbol{v}$）方向に対して右向きに曲がっていくように見える
  - 回転中心に近づくときも，遠ざかるときも

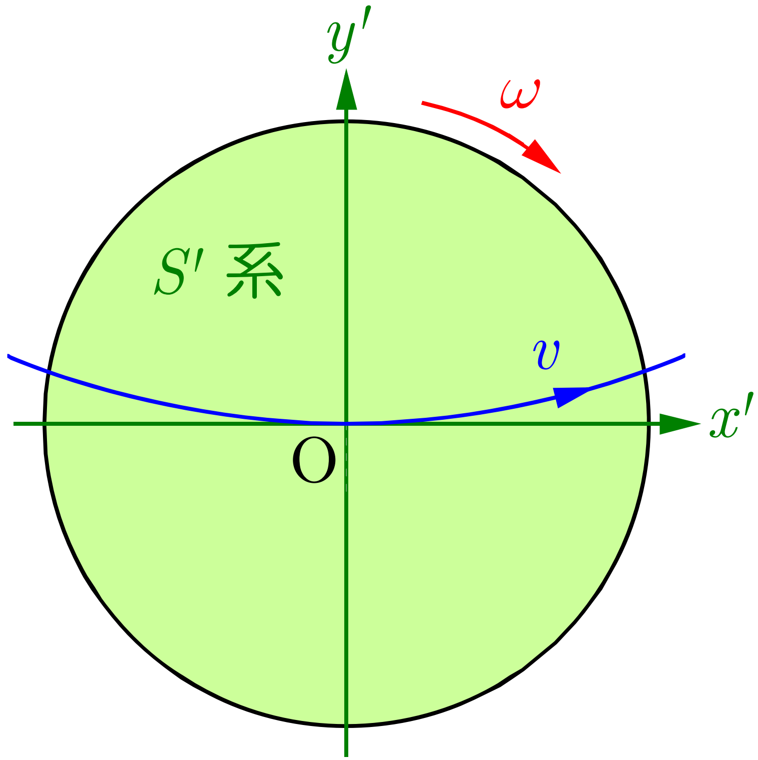
- 円盤の回転が逆（角速度：$-\omega$ ）の時はどうか？

慣性系を直進する物体

- S' 系から見た質点P の運動
  - 円盤の回転が逆の時

$$x' = vt\cos(-\omega t) = vt\cos\omega t$$

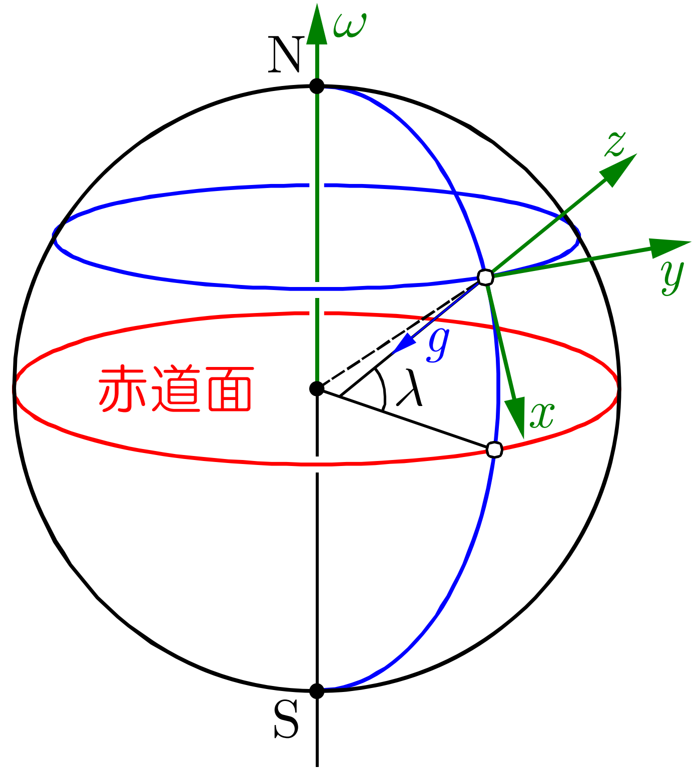
$$y' = -vt\sin(-\omega t) = vt\sin\omega t$$



  - 進行（速度$\boldsymbol{v}$）方向に対して
    左向きに曲がっていくように見える

地球上での自転によるコリオリの力

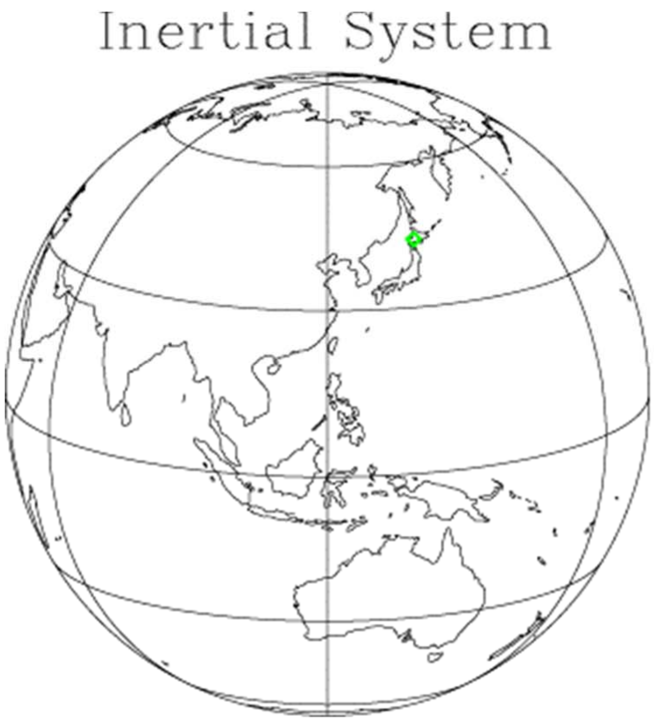
- 地上では，図のような座標軸で物事を見ている
  - 原点は自転軸から離れたところにある
  - 座標軸（地表面）は
    自転軸から傾いている

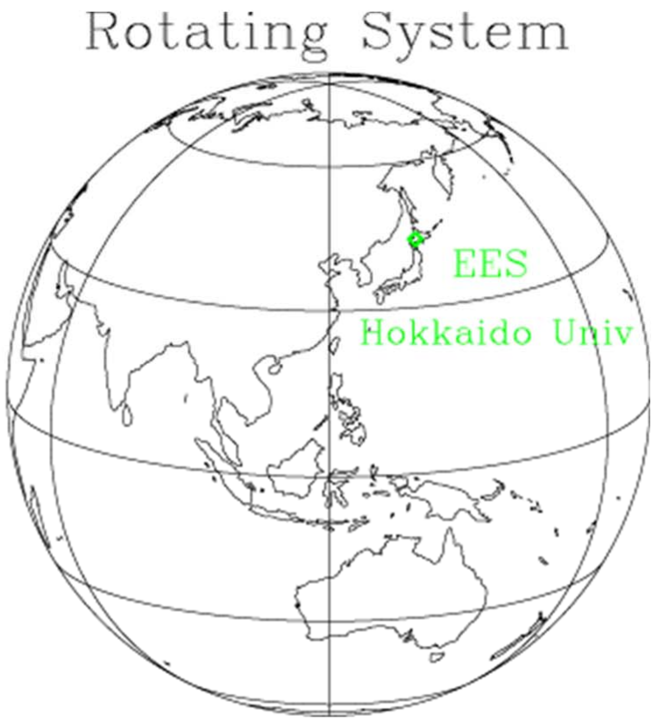


- コリオリの力
  - 北半球：進行方向右向き
  - 南半球：進行方向左向き
  - 極地で大きく，
    赤道上ではゼロ

地球上での自転によるコリオリの力

- 自転とは無関係に地球表面に沿って南下する物体

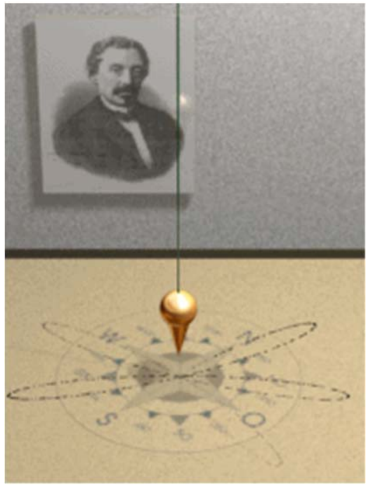


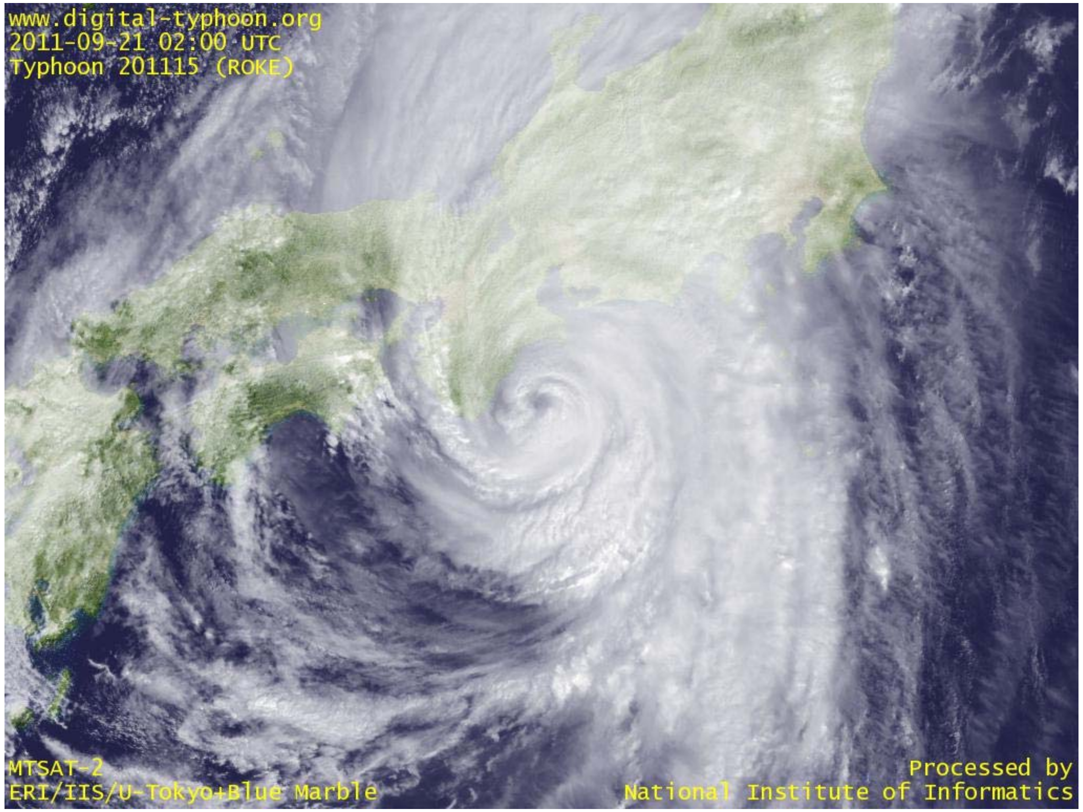


- http://wwwoa.ees.hokudai.ac.jp/~f-hasebe/hasebe-jp.html

地球上での自転によるコリオリの力

- コリオリの力によって起こる現象
  - 低気圧（台風）に吹き込む風
  - フーコーふり子

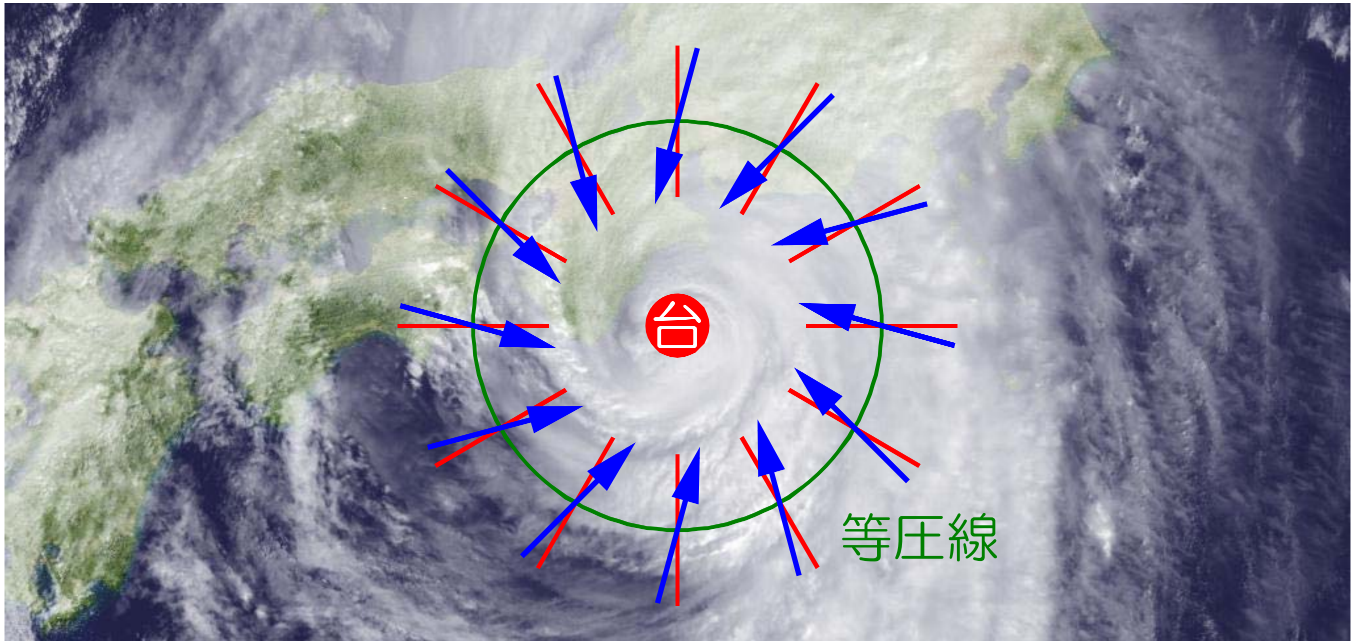




http://ja.wikipedia.org/wiki/フーコーの振り子

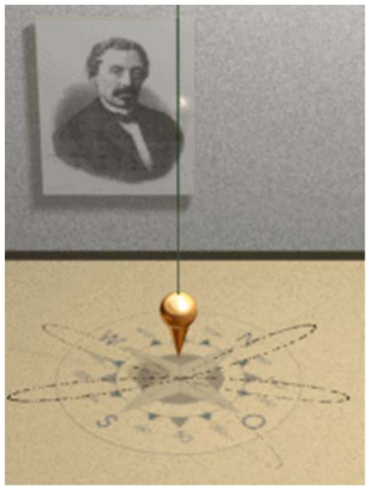
低気圧(台風)に吹き込む風

- 等圧線に垂直ではなく右向きに曲がる
  - 反時計回りの渦が発生する



フーコーふり子

- たとえば，北極に置かれたふり子
  - ふり子は慣性系の平面（xz 平面）内で振れる
  - 地球上から見ると
    振動面が時計回りに
    （右向きに）回転する



http://ja.wikipedia.org/wiki/フーコーの振り子