応用力学２　講義スライド

http://kozo4.ace.nitech.ac.jp/iwa/

●はりの力学（復習）
●トラス
●影響線
●単位荷重の定理
●不静定構造

応用力学1で学んだこと

1. 力 ： 力とそのつり合い
2. 応力とひずみ ： 応力とひずみの関係
3. **はりの力学**
   a. はりの断面力
   b. 断面力と外力の関係
   c. 曲げモーメントとせん断力
   d. はりの理論での仮定
   e. はりのひずみと応力
   f. はりのたわみ

応用力学2で学ぶこと

1．トラス構造：三角形を基本とする骨組み構造

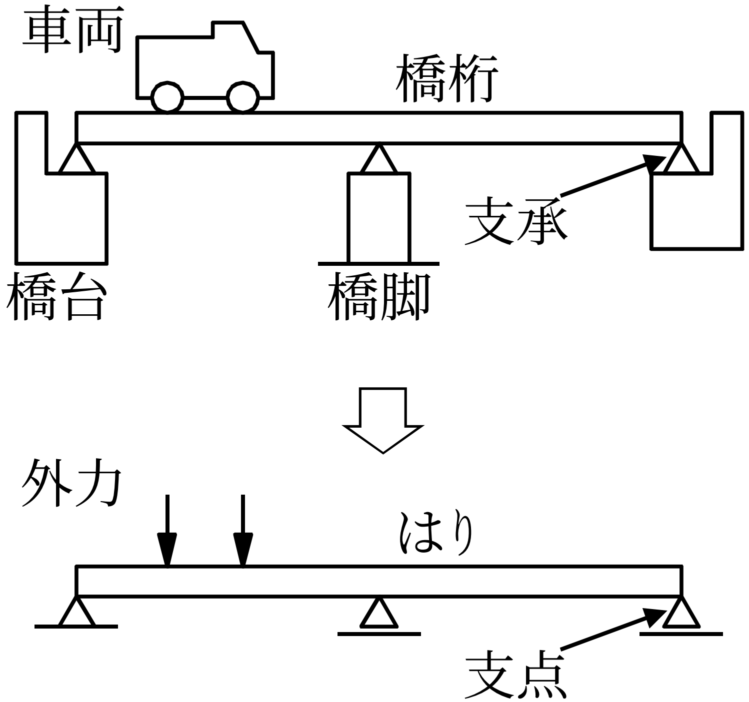
2．影響線：移動荷重による断面力等の変化

3．単位荷重の定理：特定点の変位を知る

4．不静定構造：力のつり合いでは解けない構造

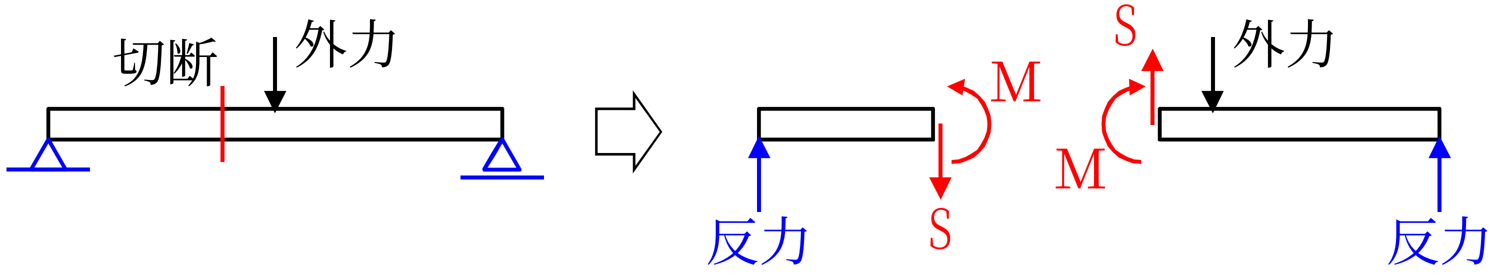
“はり”とは

- はり：細長い棒状の部材
  - 例）橋桁

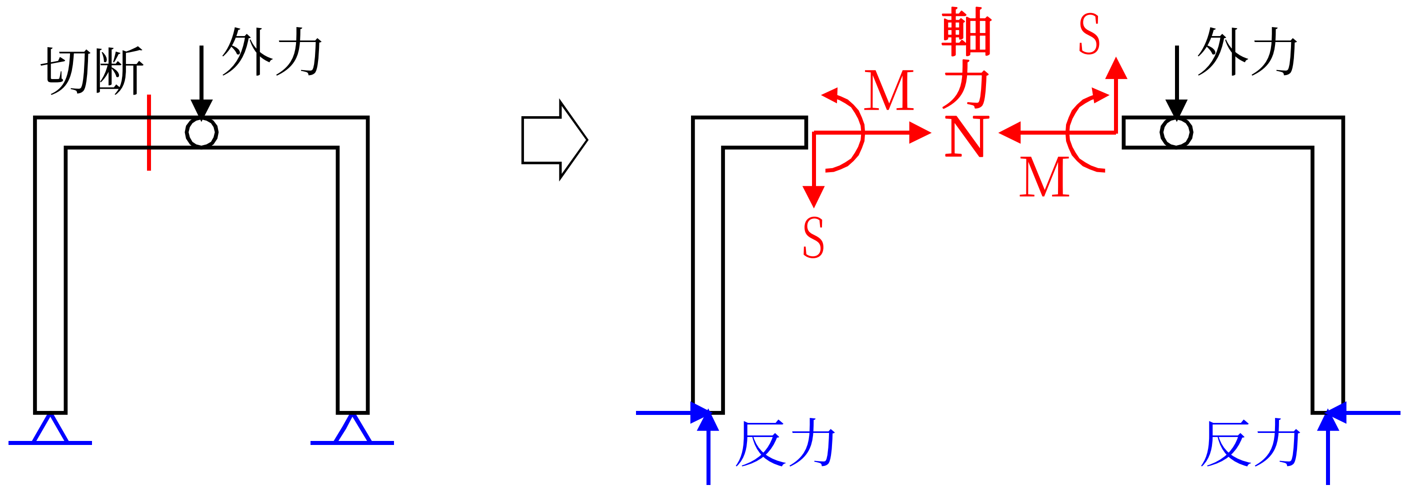


はりの断面力

● 水平ばり（応力１）



● ラーメン構造



はり構造

- 桁橋：はり構造の橋桁をもつ単純な橋

ラーメン構造

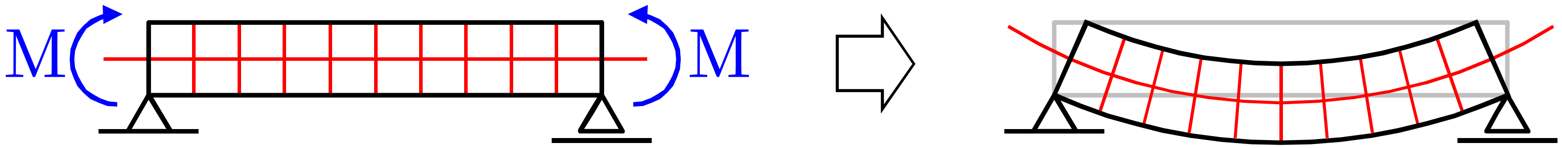
● ラーメン橋：橋桁と橋脚が剛結

ラーメン構造

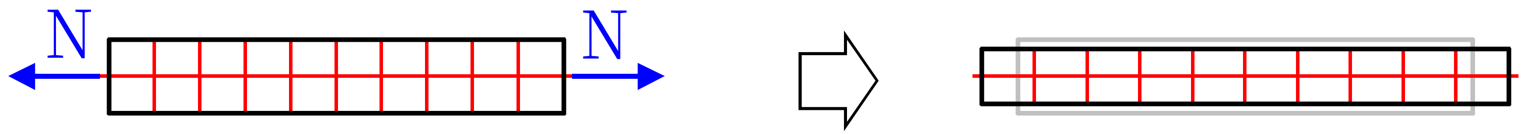
- ラーメン橋脚：橋脚がラーメン構造

はりの変形パターン

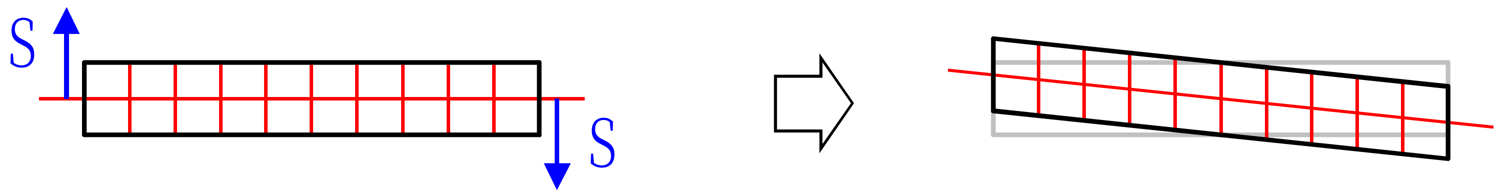
● 曲げ変形 ← 曲げモーメント



● 伸び変形 ← 軸力



● せん断変形（はり：非常に小さい） ← せん断力

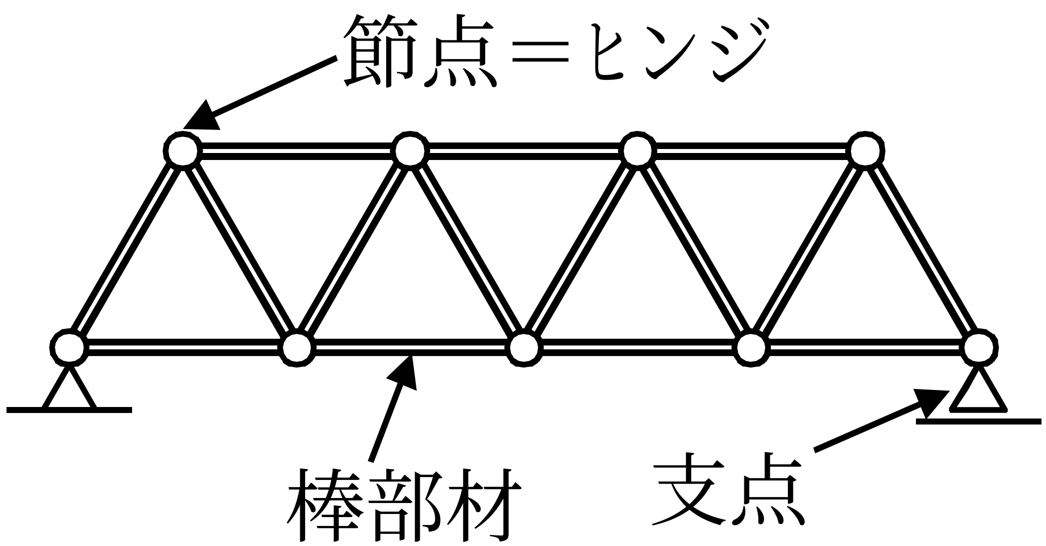


トラス構造

- トラス構造の特性
- 断面力の解法：節点法
- 断面力の解法：切断法

“トラス”とは

- トラス構造：
  - 三角形の組み合わせで構成された骨組み構造
  - 部材どうしはヒンジで結合されている：節点
  - 外力は節点のみに作用
    → 部材には軸力のみ作用



トラス橋：トラス構造の橋

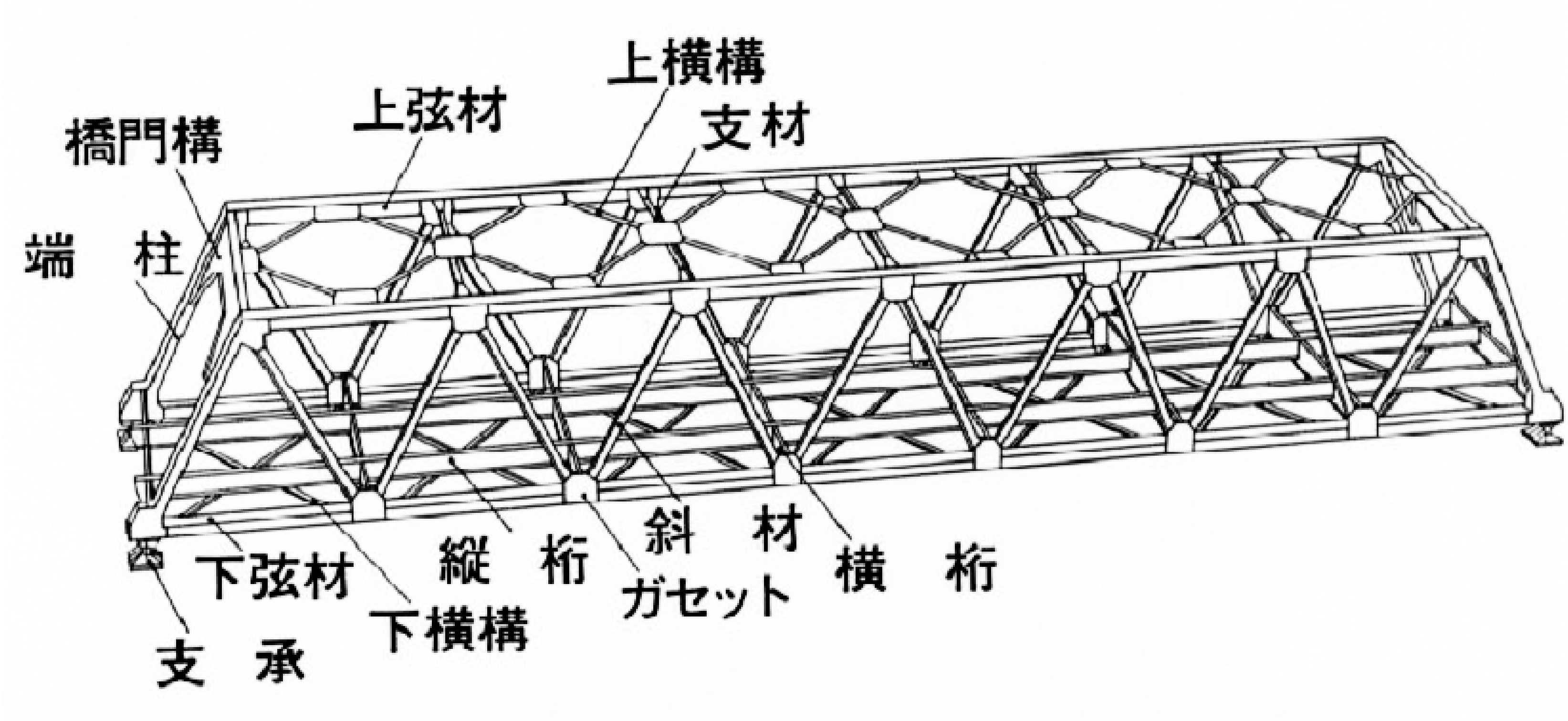
ケベック橋（スパン長 548m）

ブレースドリブアーチ:トラスによるアーチ橋

吊橋のトラス補剛桁

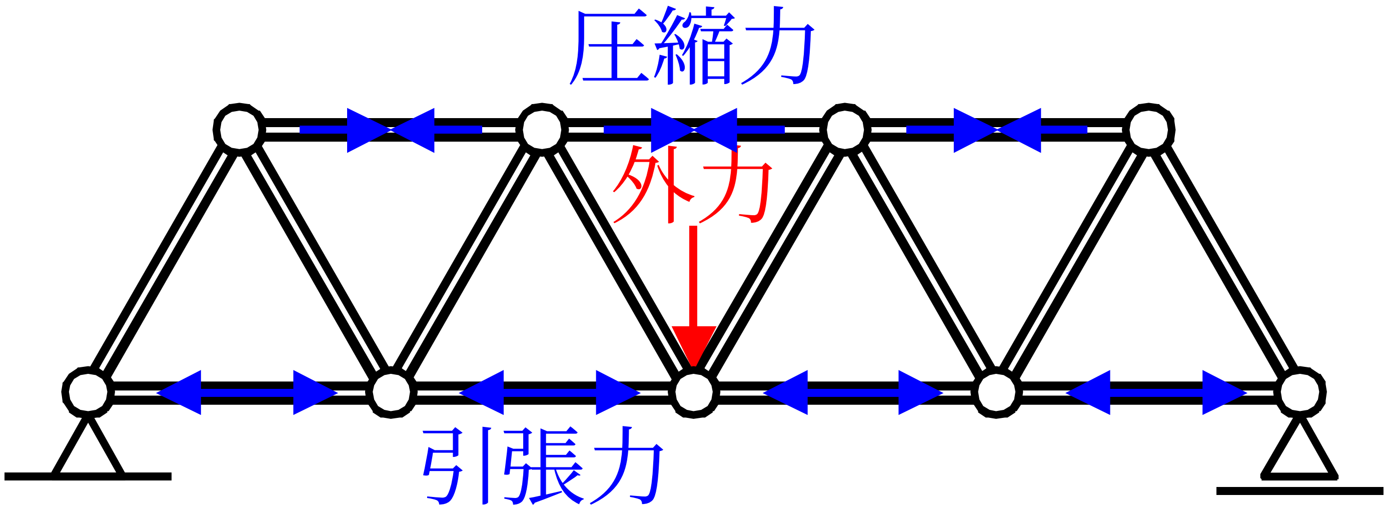
トラス橋の構造

- トラスの仮定を満たすよう設計
  1. 部材どうしはヒンジで結合
  2. 外力は節点のみに作用



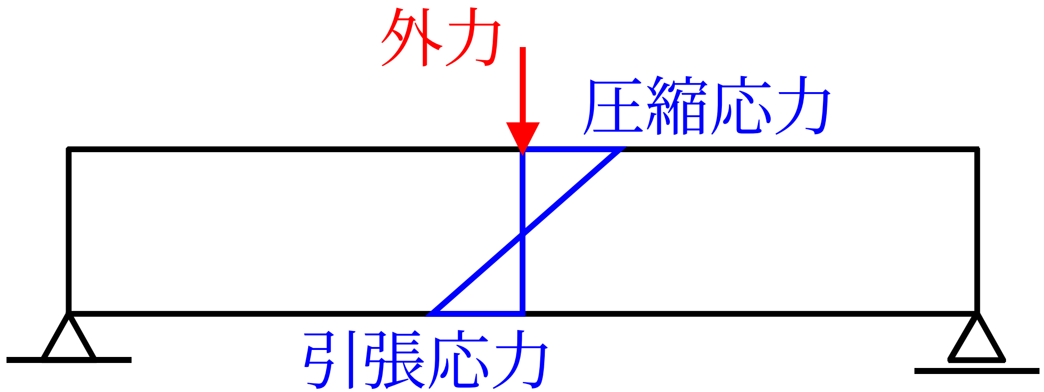
トラスの特性

- トラス構造：三角形の組み合わせた骨組み構造
  - 節点はヒンジ → 節点で曲げモーメントはゼロ
  - 外力は節点のみに作用
    → 部材には軸力のみ作用（部材内で軸力一定）

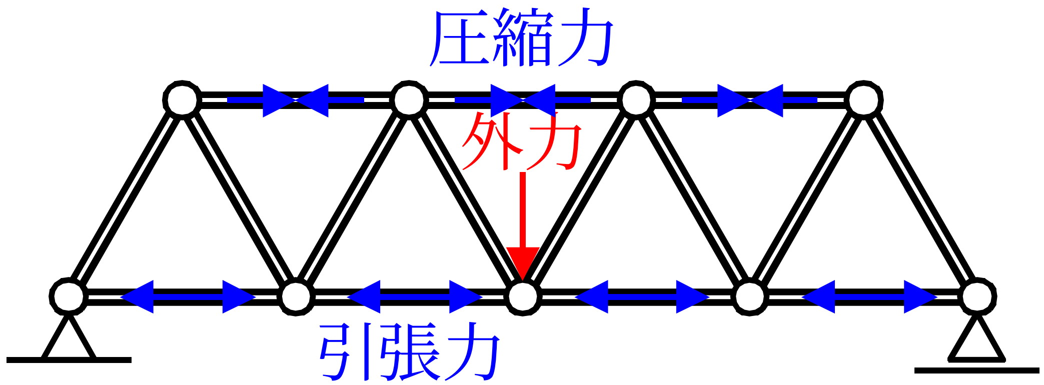


はりとの対比 (正のモーメント作用時)

- はり
  - ＳとＭが作用
  - 上部：圧縮応力
  - 下部：引張応力

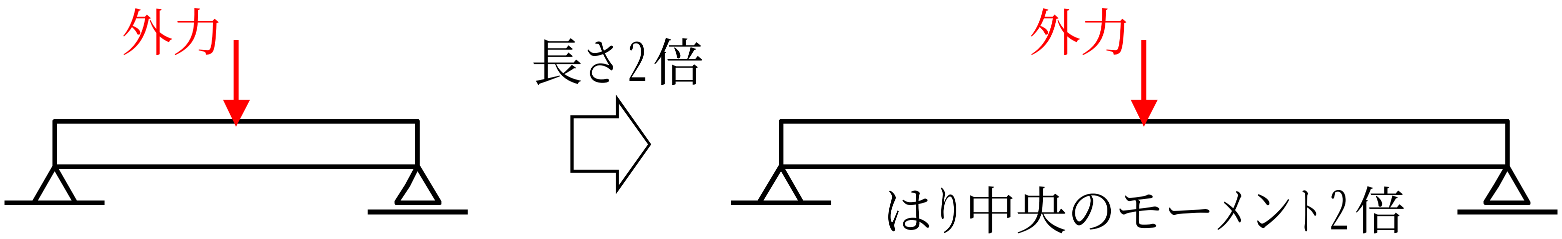


- トラス
  - 軸力のみ作用
  - 上弦材：圧縮力
  - 下弦材：引張力

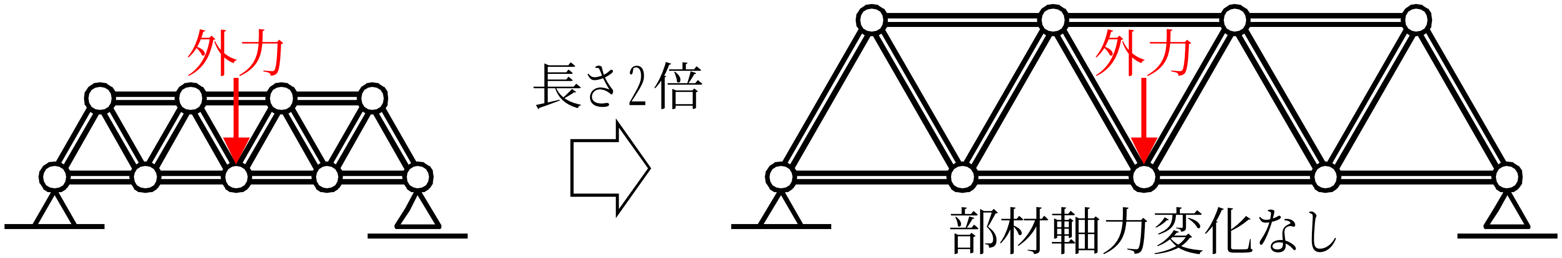


トラス構造の特徴

- はり：長さが増えると曲げモーメント増大



- トラス：長さが増えても部材軸力は不変



トラスの断面力の求め方

- 基本的には，はりと同じ：「力のつり合い」
  1. 反力：構造物全体の力のつり合い
  2. 断面力：構造物を切断し，部分的なつり合い

- はり
  - 求める断面力：せん断力，曲げモーメント分布

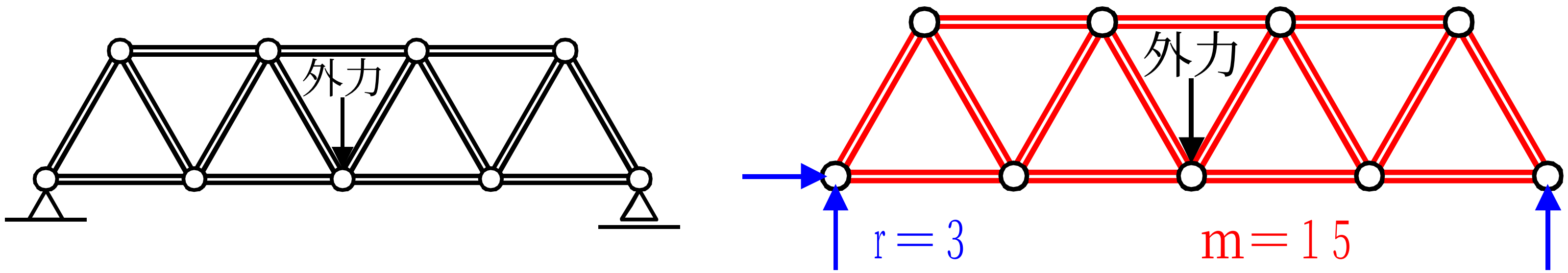
- トラス
  - 求める断面力：各部材の軸力

トラスの断面力の求め方

- 求めるべき未知量
  1．支点反力：反力の数ｒ
  2．断面力：部材の数ｍ　∵部材内で軸力一定

- 未知量（反力，断面力）を求めるためには，
  - ｍ＋ｒ個以上のつり合い式を立てればよい

例）



トラスの断面力の求め方

- 具体的な解法は２つ

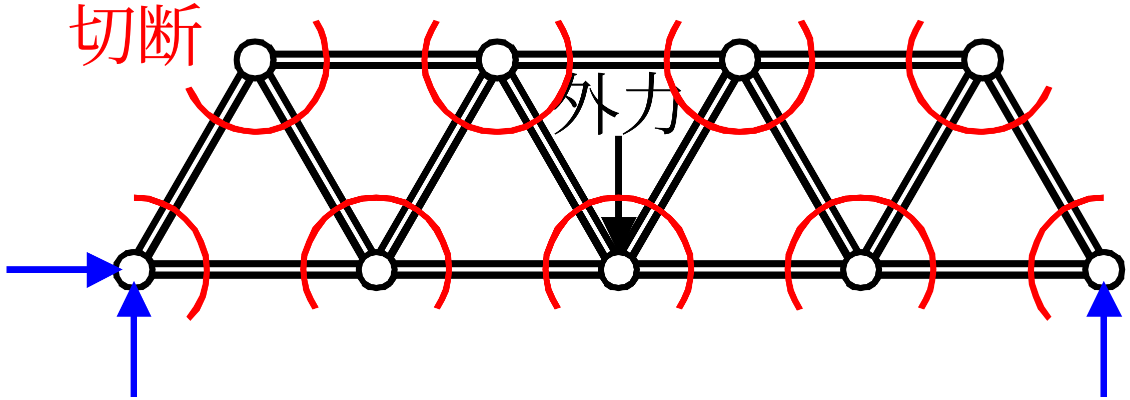
※ 反力：全体の力のつり合いで求めておく

1．節点法（格点法）：各節点ごとの力のつり合い
   - すべての部材断面力を知りたいときに便利
     - 単位荷重の定理でたわみを求める

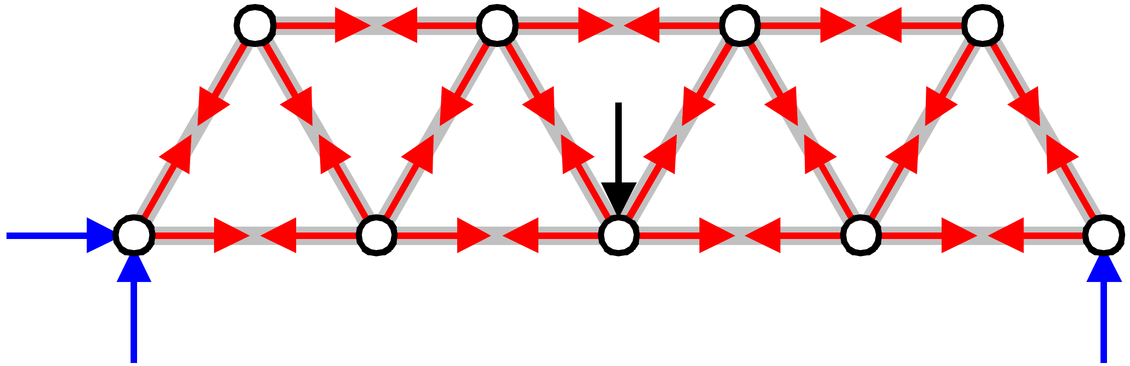
2．切断法（断面法）：任意の断面で切断
   - ある特定の部材断面力を知りたいときに便利
     - 部材力の影響線を求める

トラスの解法：節点法

1．各節点の周りで切断

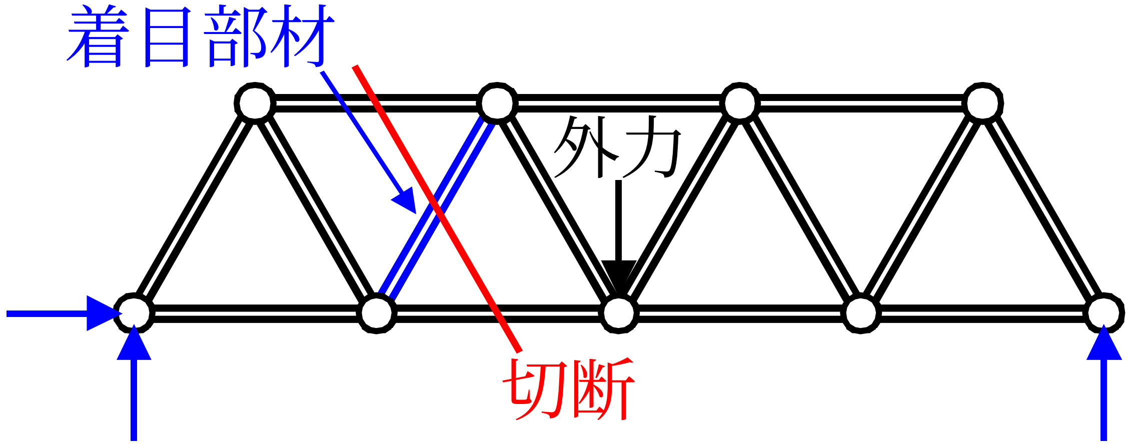


2．各節点についての力のつり合い式を立てる

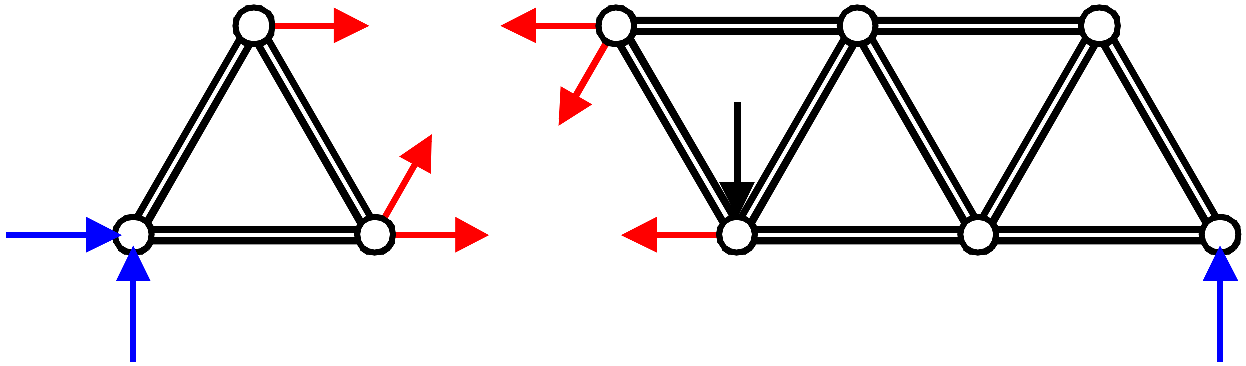


トラスの解法：切断法

1．着目部材を含む切断面で切断

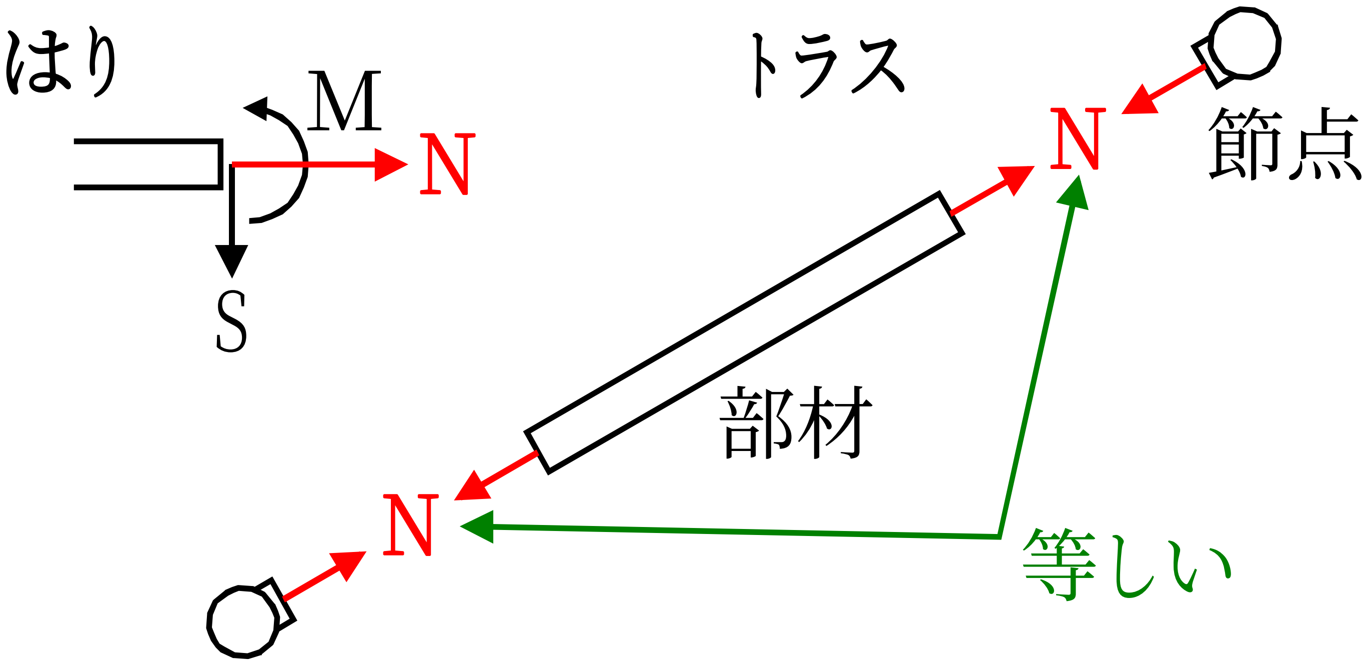


2．部分的な力のつり合い式を立てる



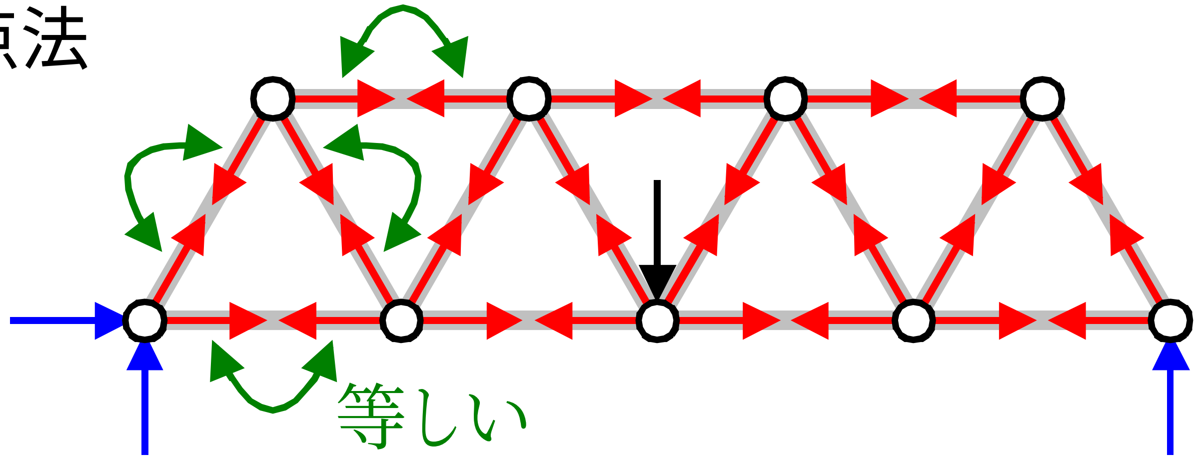
軸力の取り扱い

- 軸力：引張＝正，圧縮＝負
  - 引張力：切断面から「外向きの矢印」で表す

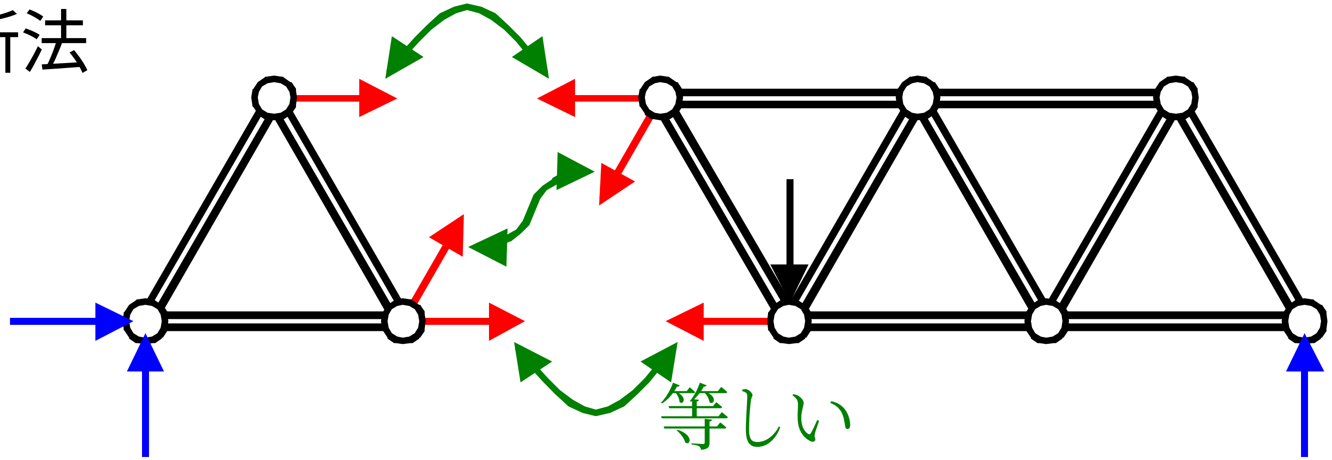


軸力の取り扱い

- １部材内の軸力は一定
  - 節点法

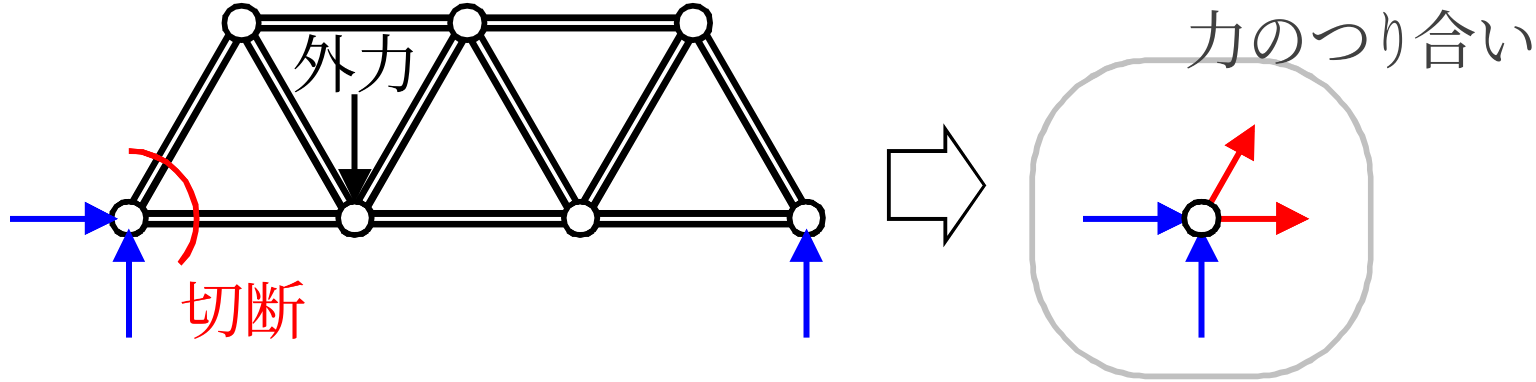


  - 切断法

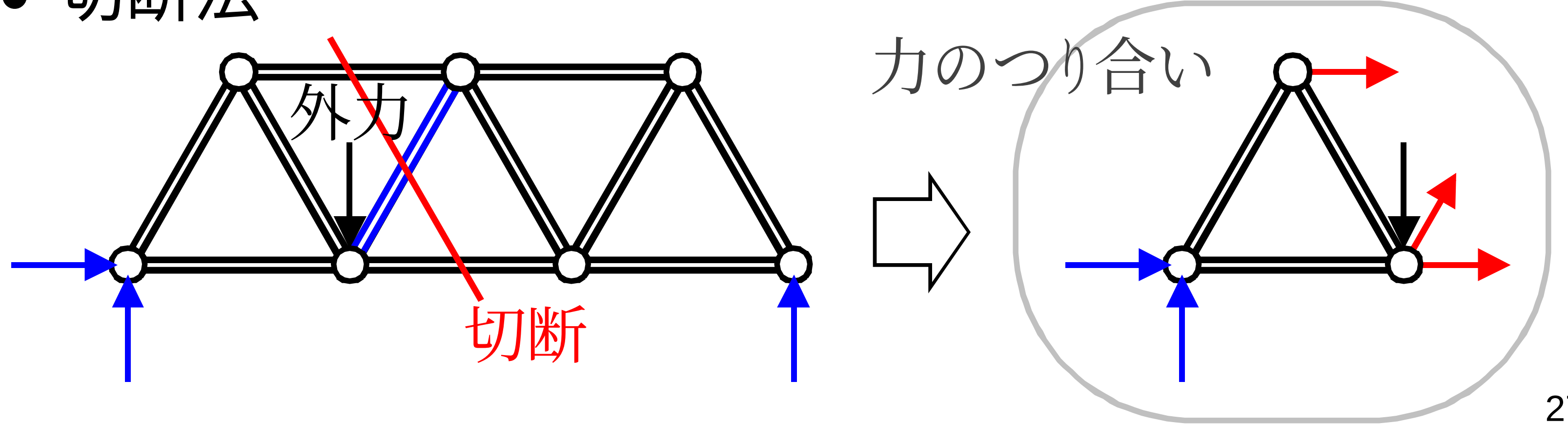


軸力の求め方

- 切断したら節点から外向き矢印 → 引張正の軸力
  - 節点法

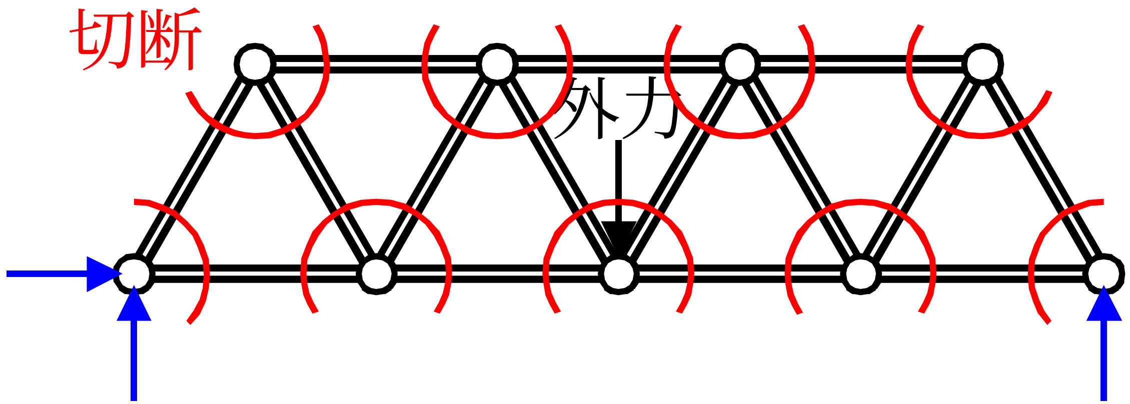


  - 切断法

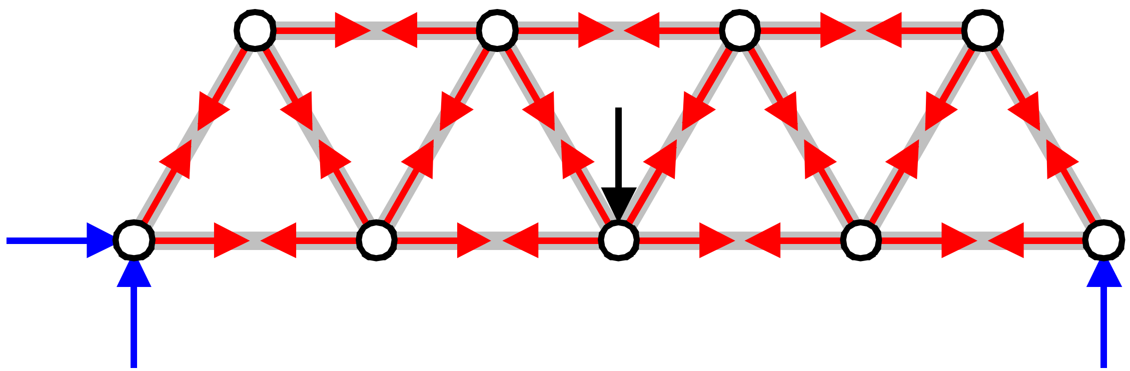


節点法

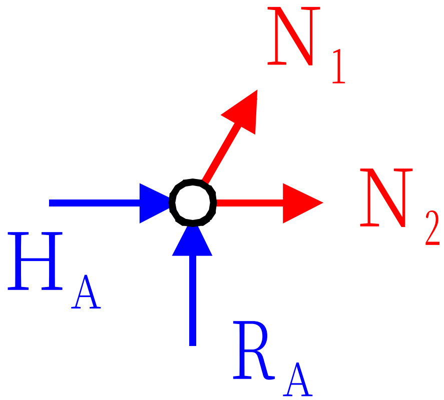
1．各節点の周りで切断



2．各節点について力のつり合い式を立てる



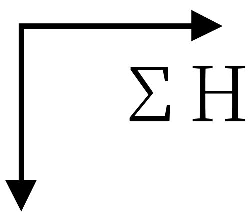
節点法:断面力の求め方



- 各節点についての力のつり合い
  - すべての力は節点に集中
    → モーメントは発生しない

- 節点法では１節点につき<u>２つのつり合い式</u>
  - 回転を除く２方向：方向は自由
  - 例

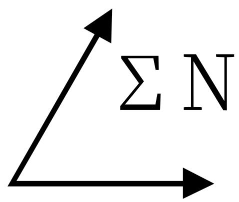
水平と鉛直



$\Sigma H = 0$

$\Sigma V = 0$

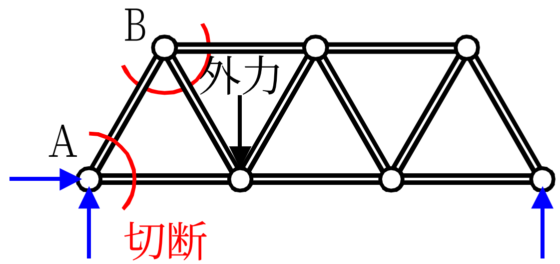
部材方向



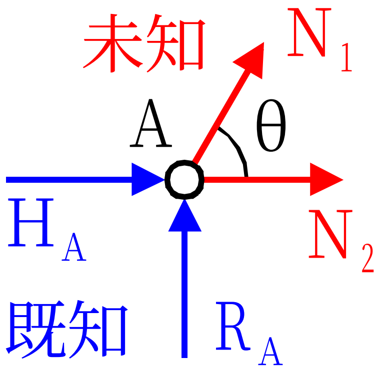
$\Sigma N_1 = 0$

$\Sigma N_2 = 0$

節点法：断面力の求め方



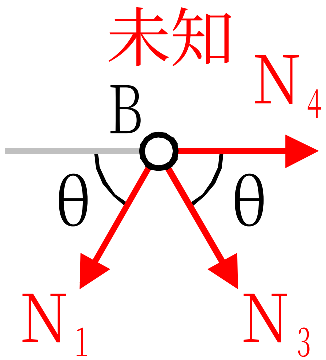
● 例１：点A



- 水平： $\overrightarrow{\Sigma H}=N_1\cos\theta+N_2+H_A=0$
- 鉛直： $\downarrow\Sigma V=-N_1\sin\theta-R_A=0$

→ これを解けば，N_1，N_2が求まる

● 例２：点B

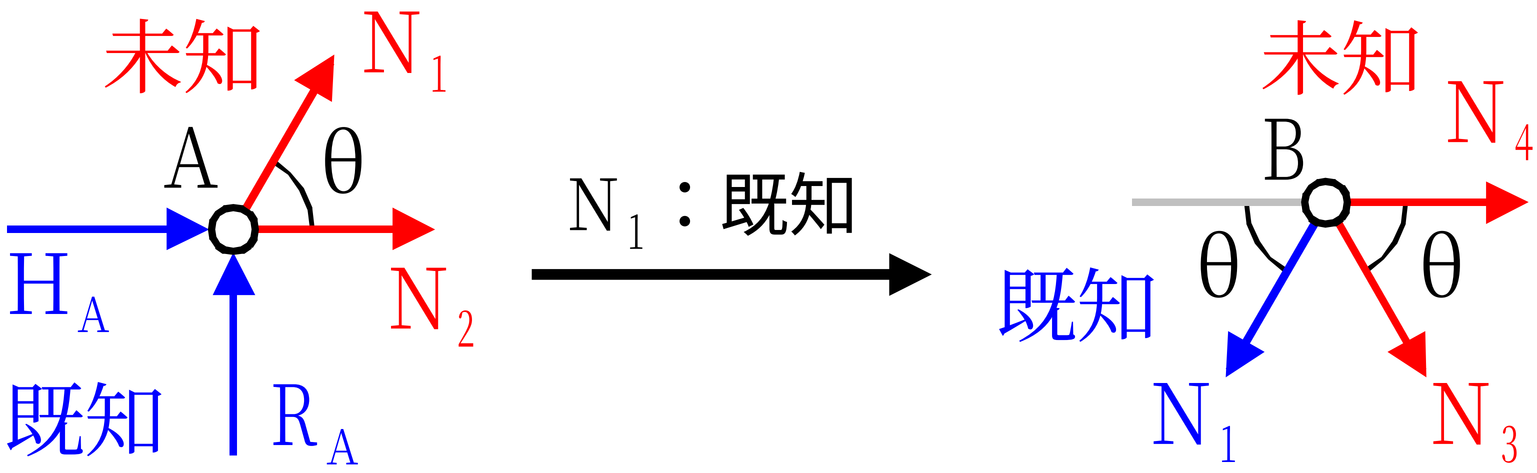


- $\overrightarrow{\Sigma H}=-N_1\cos\theta+N_3\cos\theta+N_4=0$
- $\downarrow\Sigma V=N_1\sin\theta+N_3\sin\theta=0$

→ 未知数３＞式２つ：解けない

節点法:計算の進め方

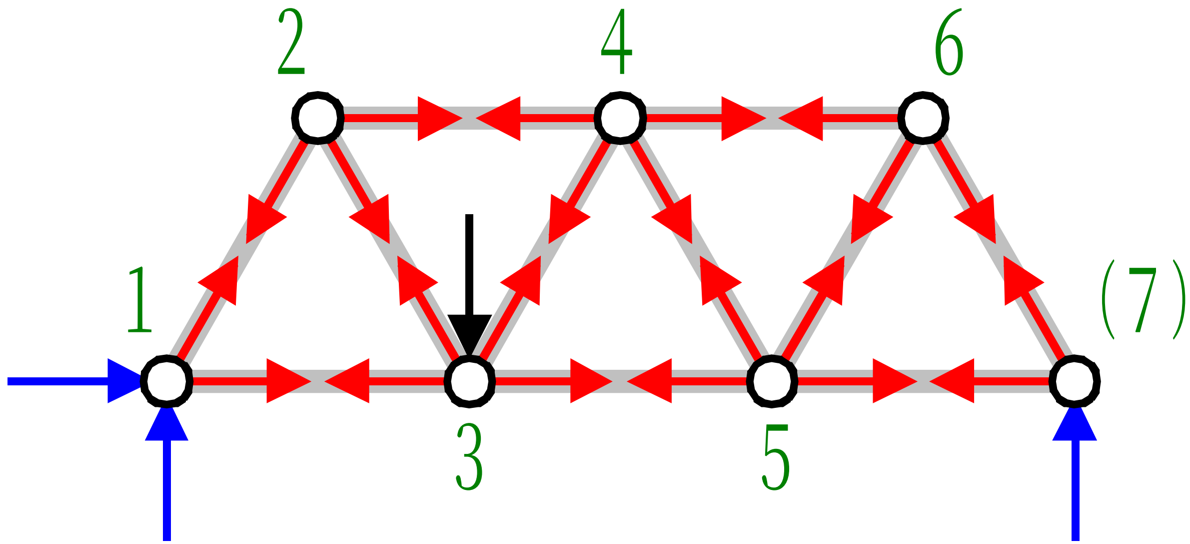
- 点Ａの計算 → その結果を使って，点Ｂの計算



- 節点法での計算：
  - 未知断面力の数が２以下となるよう，連鎖的に各節点のつり合い式を立てていく

節点法：計算の進め方

- 節点法での計算：
  - 未知断面力の数が２以下となるよう，連鎖的に各節点のつり合い式を立てていく
  - 例

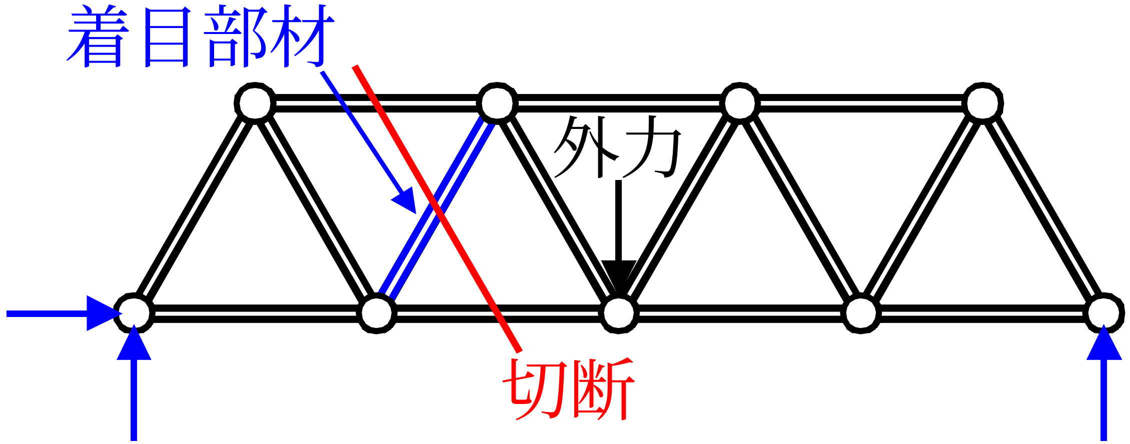


節点法:まとめ

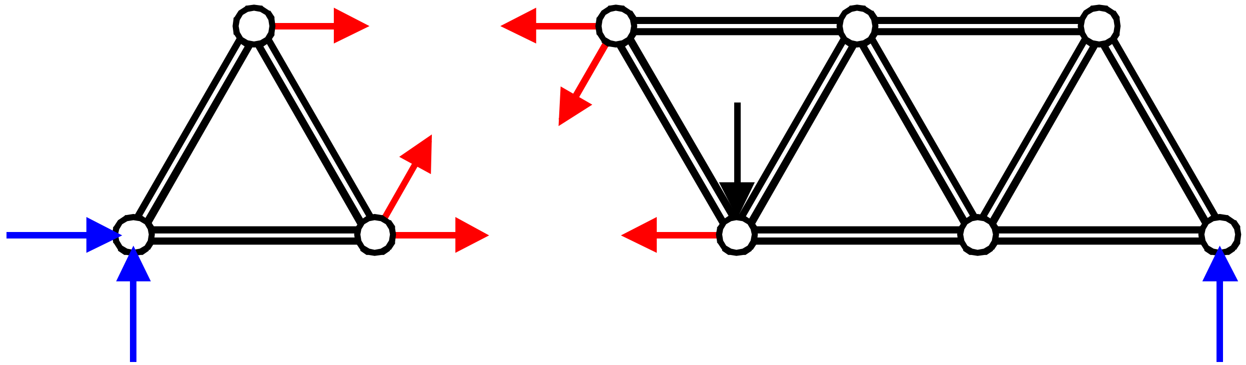
- 計算要領：
  - 各節点ごとに２方向のつり合い式を立てる
  - 節点の順番：未知断面力が２つ以下となるよう
- 利点：
  - すべての断面力を効率的に求めることができる
    → 単位荷重の定理でたわみを求めるときに有効
- 欠点：
  - ある節点で計算間違いをすると，
    その後の計算すべてにそれが伝播する

切断法

1．着目部材を含む切断面で切断



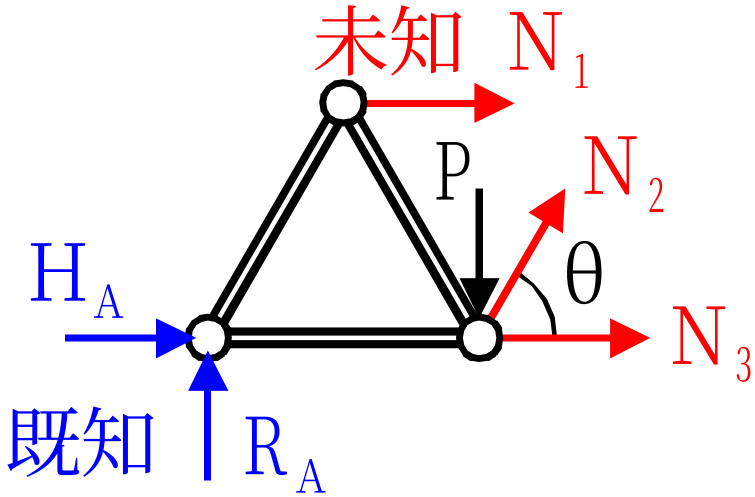
2．部分的な力のつり合い式を立てる

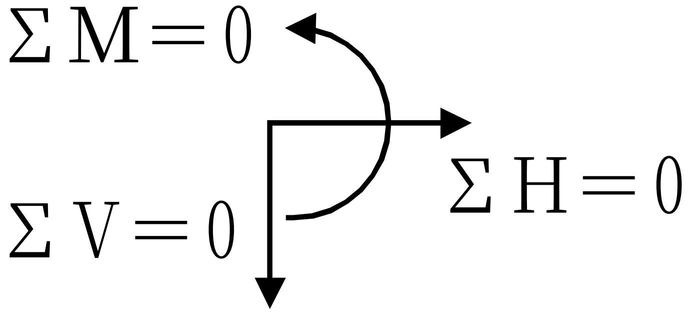


切断法：断面力の求め方

- 切断した一部分について力のつり合い
  - 複数の節点を含む
  - → モーメントが発生

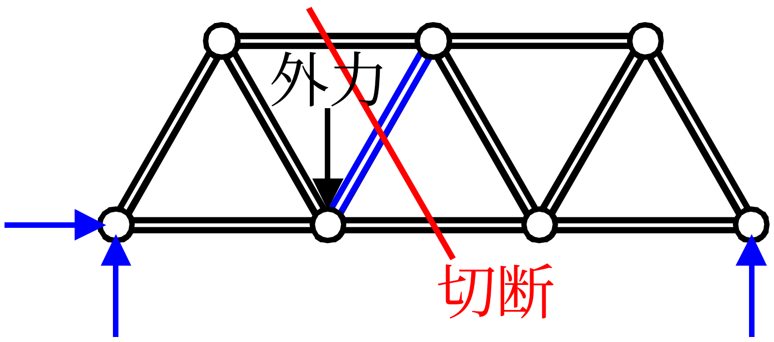
- 切断法では一般に，３つのつり合い式
  - 例



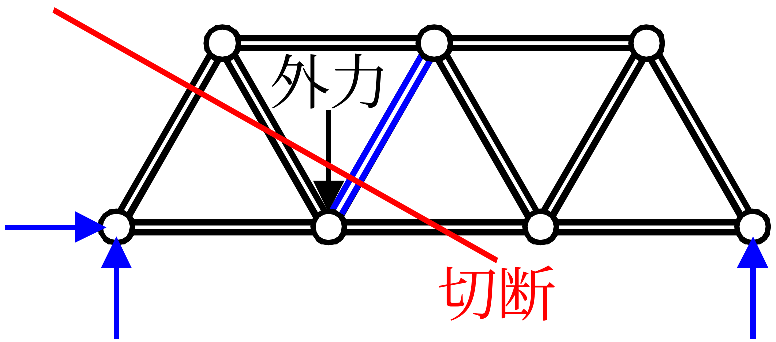


切断法：切断方法

- 未知断面力の数が３以下となるように切断
  - 例１
    - 未知断面力：３
      → ＯＫ

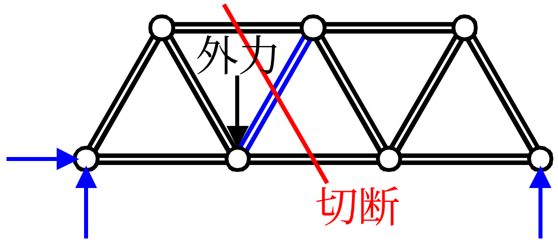


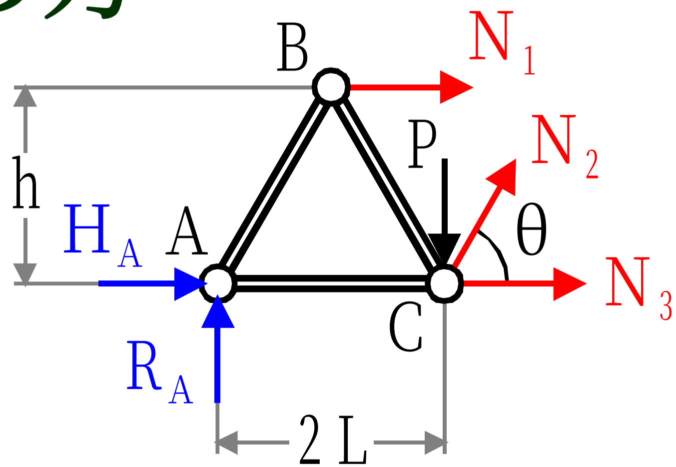
  - 例２
    - 未知断面力：４
      ＞つり合い式：３
      → 解けない



    - ４つの断面力のうち１つ以上既知なら解ける

切断法：断面力の求め方





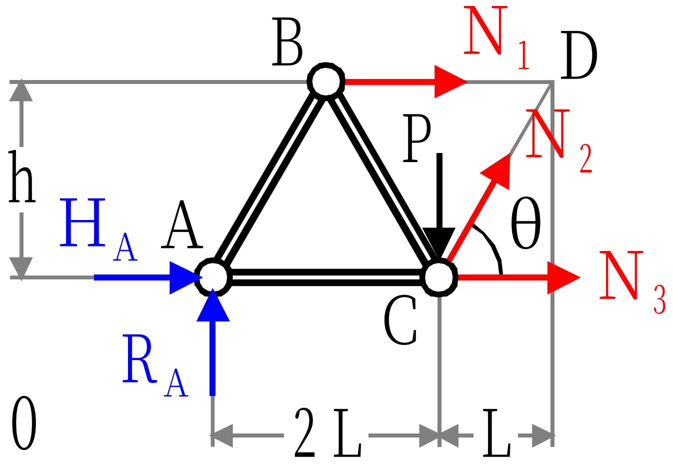
- 水平：　$\overrightarrow{\Sigma H} = N_1 + N_2 \cos\theta + N_3 + H_A = 0$
- 鉛直：$\downarrow \Sigma V = -N_2 \sin\theta - R_A + P = 0$
- M：$\circlearrowright \Sigma M_A = N_1 \cdot h - N_2 \sin\theta \cdot 2L + P \cdot 2L = 0$

　→ これを解けば，N_1～N_3 が求まる

※ 連立方程式は解くのが面倒

切断法：効率的な解き方

- 連立方程式にしない
  - N_1：N_2とN_3の交点Cを中心としてMをとる
    - $\circlearrowright \Sigma M_C = N_1 \cdot h + R_A \cdot 2L = 0$
  - N_2：N_1, N_3は水平 → 鉛直方向のつり合い
    - $\downarrow \Sigma V = -N_2 \sin\theta - R_A + P = 0$
  - N_3：N_1とN_2の交点Dを中心としてMをとる
    - $\circlearrowright \Sigma M_D = -N_3 \cdot h - H_A \cdot h + R_A \cdot 3L - P \cdot L = 0$



切断法：まとめ

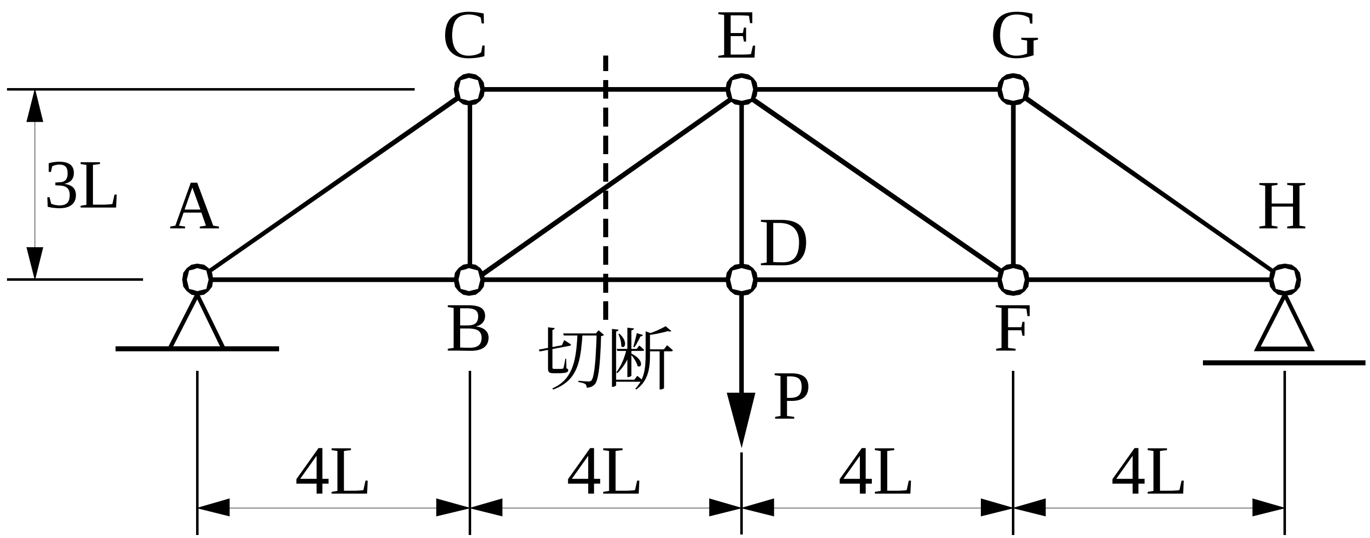
- 計算要領：
  - 任意面で切断して，３方向のつり合い式
  - 方向やＭの中心をうまく選んで，効率よく

- 利点：
  - 特定の部材断面力を効率的に求めることができる
    → 断面力の影響線を求めるときに有効

- 欠点：
  - 全部材の断面力を求めるのは面倒

練習問題

- 図に示すトラスについて，以下の問いに答えよ．
  1. 全部材の軸力（引張正）を節点法で求めよ．
  2. 破線で示した部分に切断法（断面法）を適用し，部材BD，BE，CEの軸力（引張正）を求めよ．



影響線

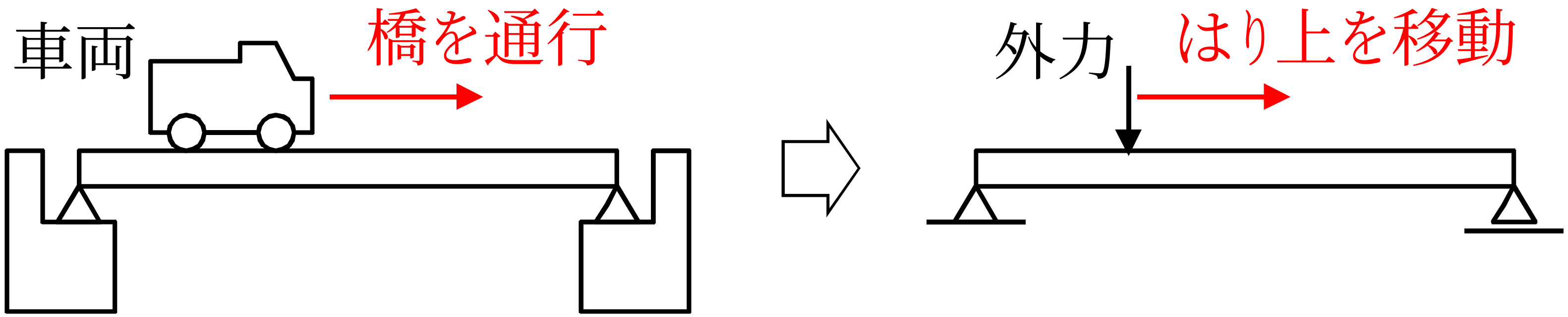
●移動荷重と影響線
●直接載荷の影響線
●間接載荷の影響線

橋:人や物が通るもの

橋：人や物が通るもの

移動荷重と影響線

- 移動荷重：車両など，橋の上を移動していく外力

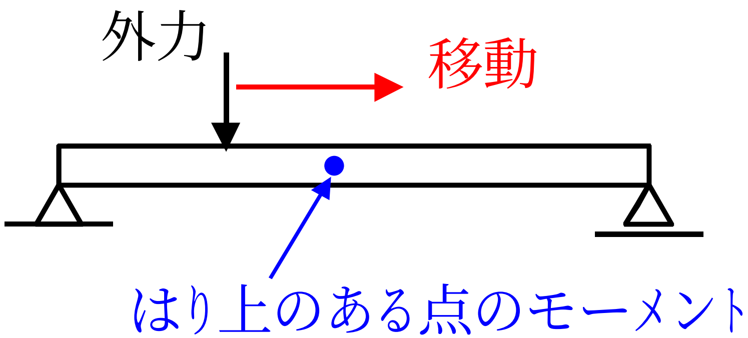


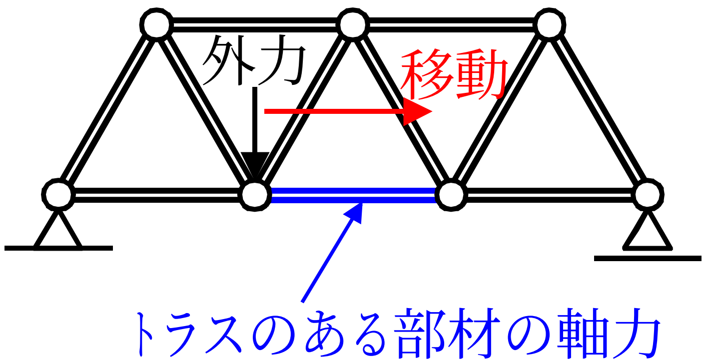
- 橋の設計：車両の位置によらず安全である必要
  - 車両位置によって断面力などがどう変化するかあらかじめ知っておく必要がある：影響線
  - 最大断面力に耐えるよう部材を設計

移動荷重と影響線

- 影響線：ある量の荷重位置による変化を示した図
  - ある支点の反力
  - はり上の１点の断面力（せん断力，モーメント）
  - トラスの中の１部材の軸力
  - はり上の１点のたわみ

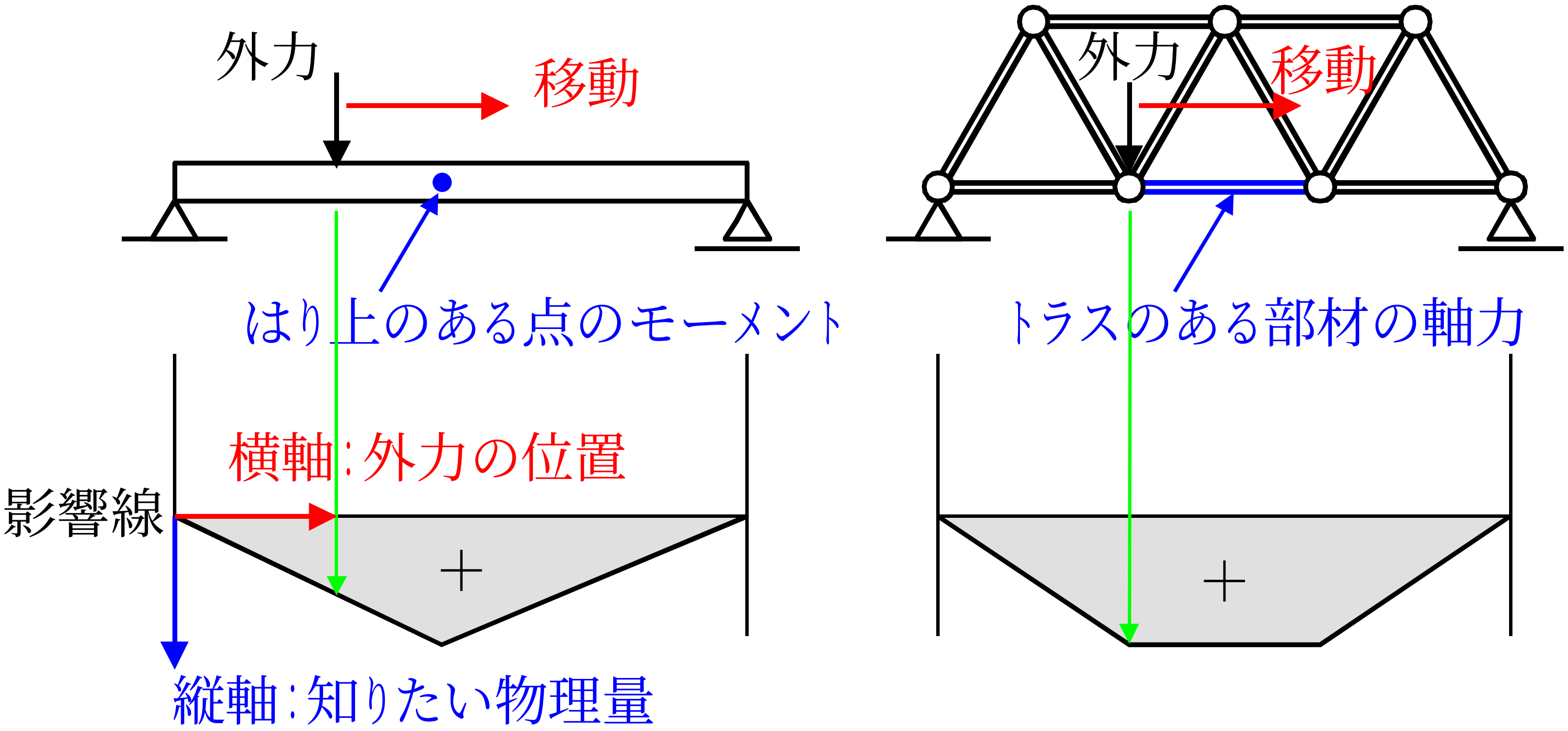
  ※あるひとつの物理量に着目していることに注意





移動荷重と影響線

- 影響線：<u>ある量</u>の荷重位置による変化を示した図

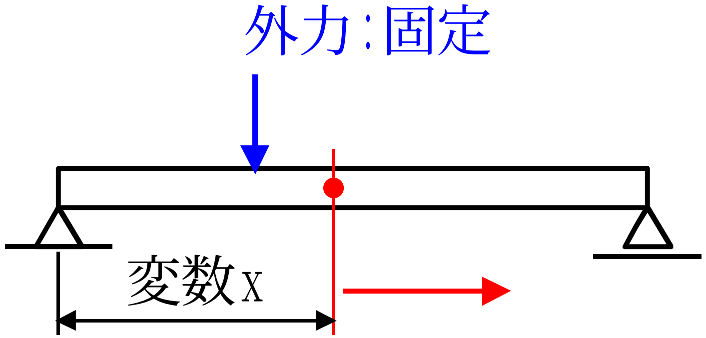


断面力の影響線の求め方

- 基本的な考え方：断面力分布を求める場合と同様
  - 反力：全体の力のつり合い
  - 断面力：切断して部分的な力のつり合い

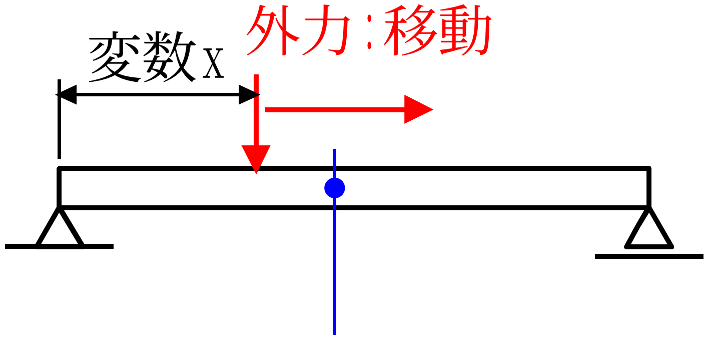
- ただし，何を変数とするかが異なる

・断面力分布



断面力を求める位置:移動

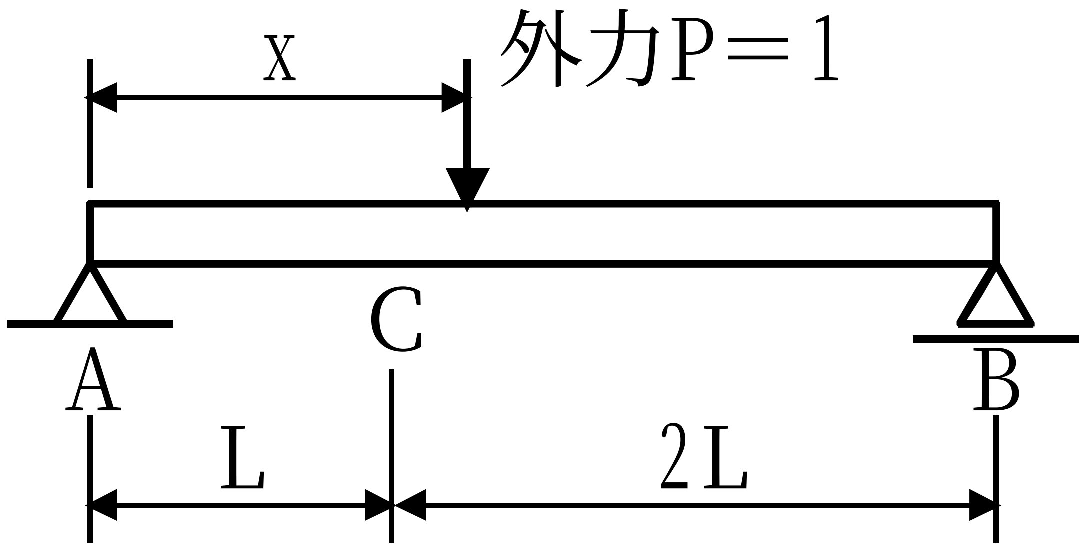
・断面力の影響線



断面力を求める位置:固定

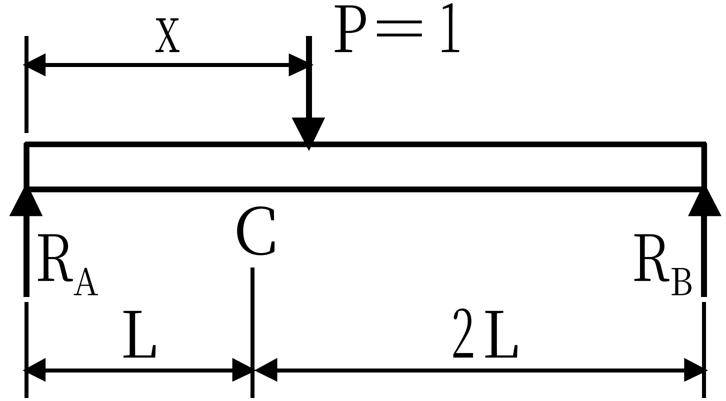
例題：はりの断面力の影響線

- 長さ３Ｌの単純ばりの１／３点Ｃのせん断力S_C，曲げモーメントM_Cの影響線を求めよ．



例題：はりの断面力の影響線

- 反力の影響線：全体の力のつり合い

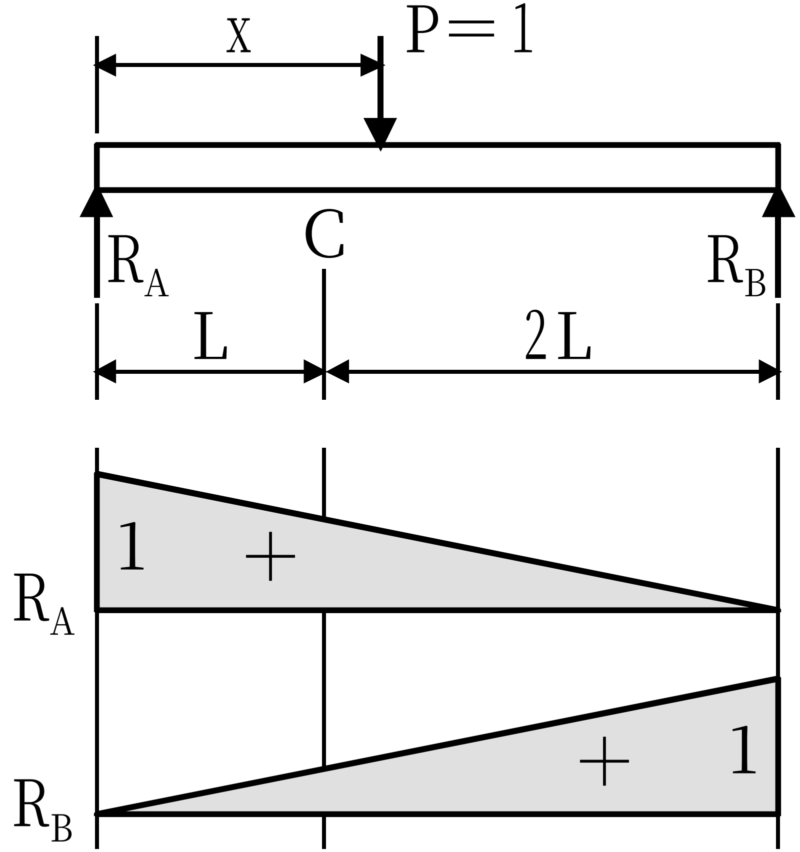


- 鉛直：$\downarrow \Sigma V = -R_A - R_B + P = 0$
- 点B周りのM：$\Sigma M_B = R_A \cdot 3L - P \cdot (3L - x) = 0$
- 点A周りのM：$\Sigma M_A = -R_B \cdot 3L + P \cdot x = 0$

→　$R_A = 1 - x/3L$,　$R_B = x/3L$　($\because P = 1$)

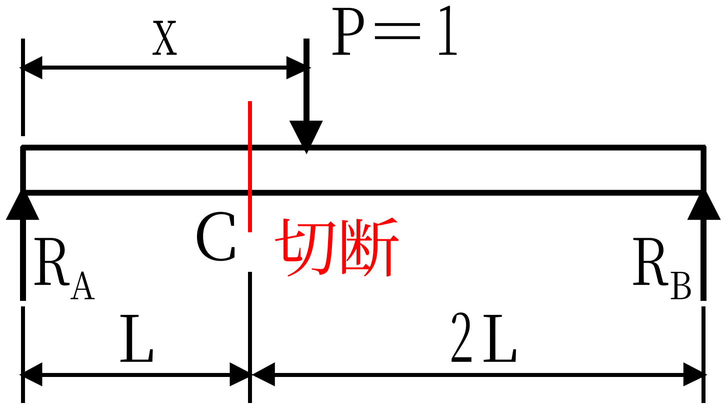
例題：はりの断面力の影響線

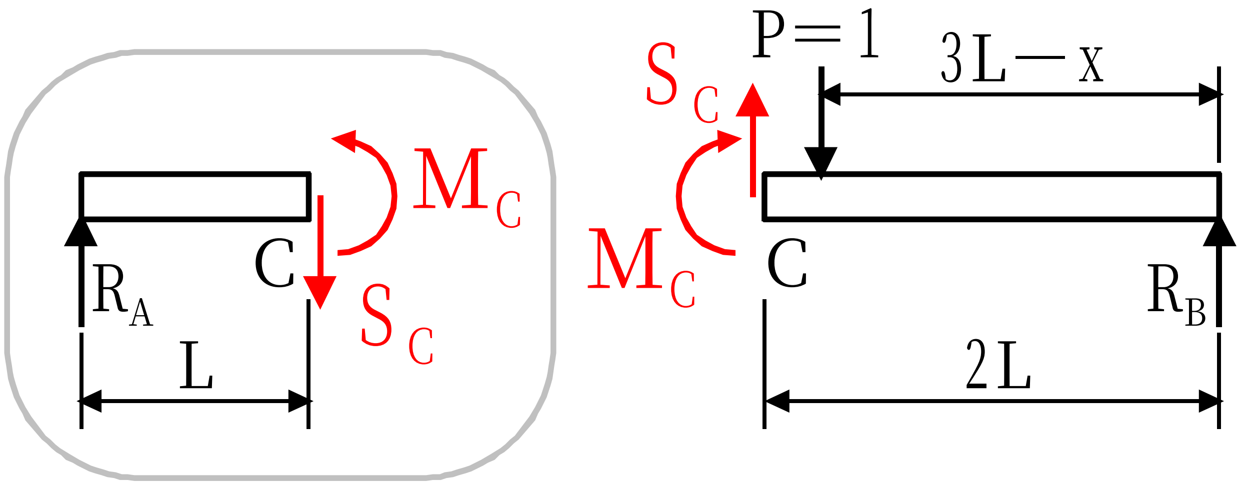
● 反力の影響線



例題：はりの断面力の影響線

- S_C，M_Cの影響線：点Cで切断，部分のつり合い

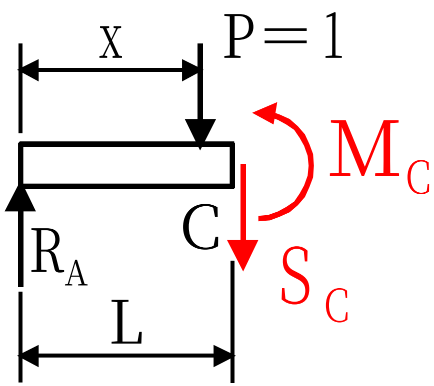


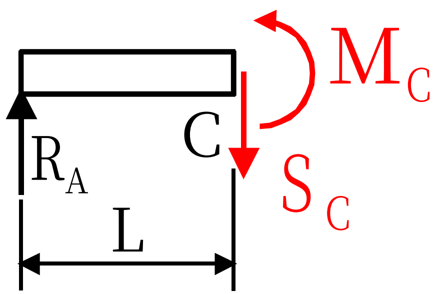


例題：はりの断面力の影響線

- 荷重位置が変化：場合分けが必要
  - 着目する部分に外力がある場合：０≦ｘ≦Ｌ
  - 着目する部分に外力がない場合：Ｌ≦ｘ≦３Ｌ

ｉ）０≦ｘ≦Ｌのとき　ⅱ）Ｌ≦ｘ≦３Ｌのとき



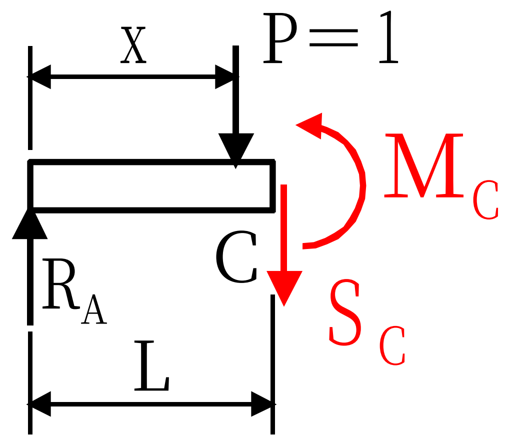


※断面力分布：断面力求める（切断）位置が移動

例題：はりの断面力の影響線

ｉ）　$0 \leqq x \leqq L$のとき

- 着目する部分に外力がある場合



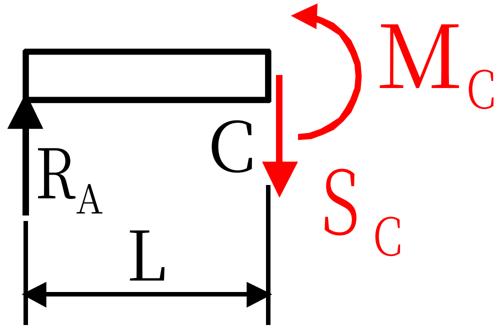
- 鉛直：$\downarrow \Sigma V = S_C - R_A + P = 0$
- M：$\curvearrowright \Sigma M_C = -M_C + R_A \cdot L - P \cdot (L - x) = 0$
  - $R_A = 1 - x / 3L, \quad P = 1$

$\rightarrow \quad S_C = -x / 3L, \quad M_C = 2x / 3$

例題：はりの断面力の影響線

ｉ）　Ｌ≦ｘ≦３Ｌのとき

- 着目する部分に外力がない場合

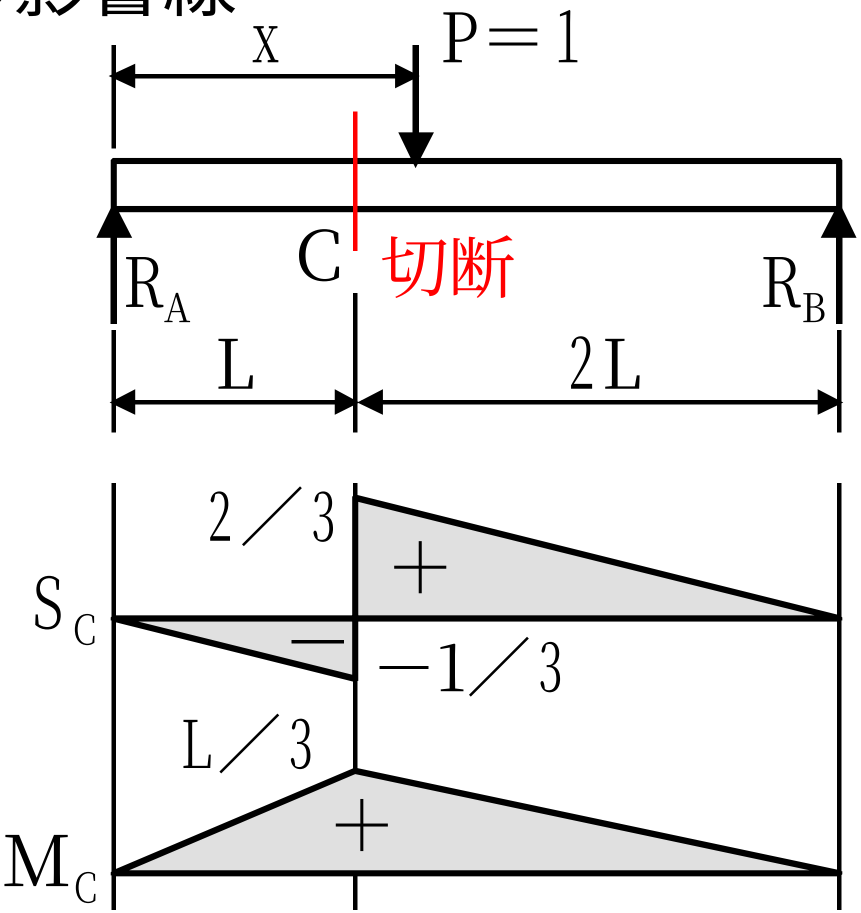


- 鉛直：$\downarrow \Sigma V = S_C - R_A = 0$
- M：$\circlearrowright \Sigma M_C = -M_C + R_A \cdot L = 0$
  - $R_A = 1 - x/3L$, $P = 1$

$\rightarrow \quad S_C = 1 - x/3L$, $M_C = L(1 - x/3L)$

例題：はりの断面力の影響線

- S_C，M_Cの影響線



- 影響線のＳとＭは微分・積分の関係にはない

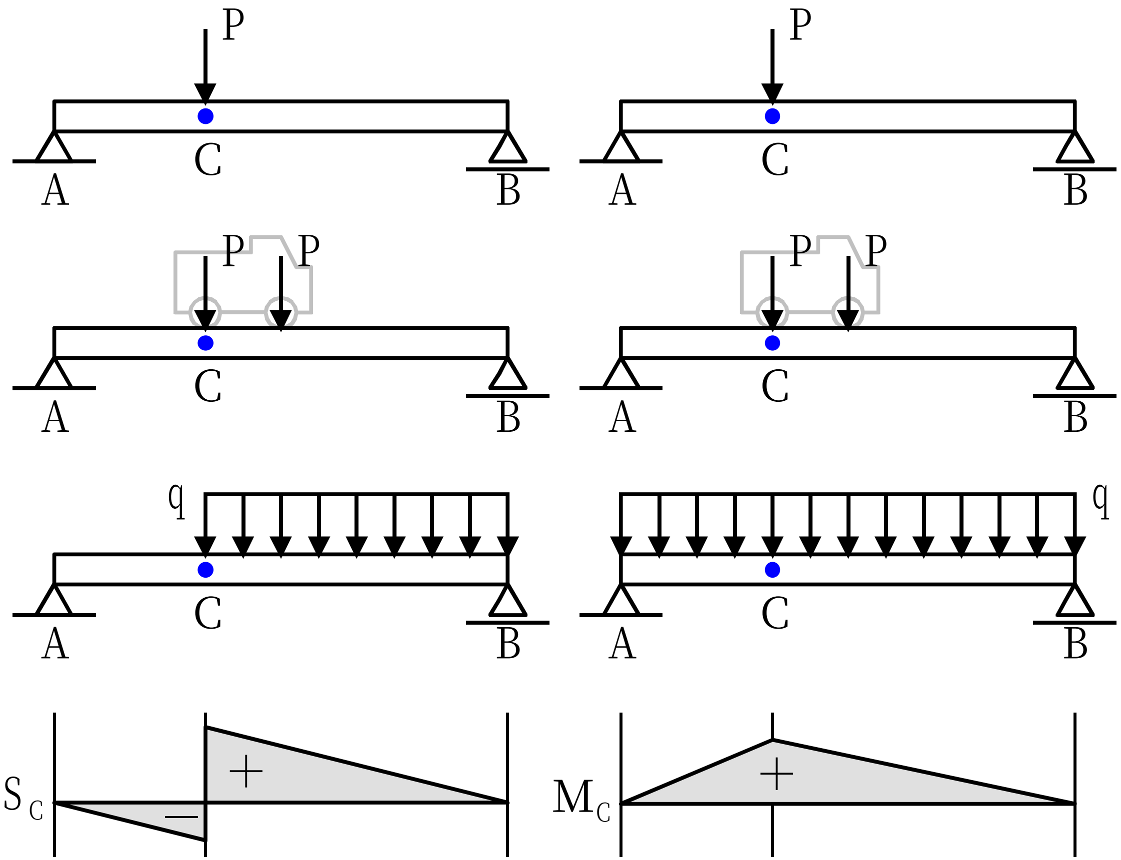
影響線の応用

- 橋の設計：部材にとって最も不利な状況を考える
  - 影響線を使って載荷状態を決める

・集中荷重

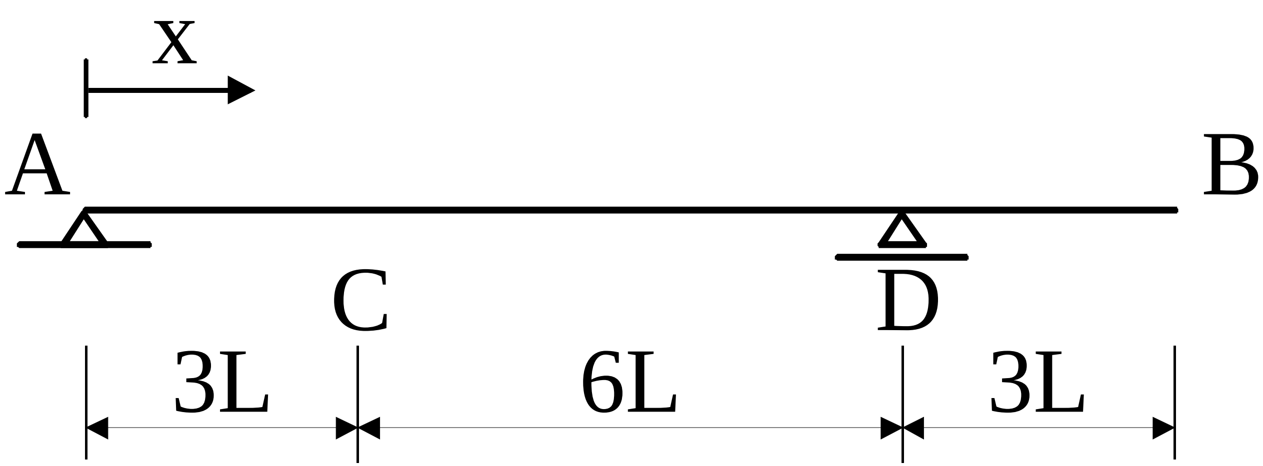
・連行荷重

・分布荷重



練習問題

- 図に示すはりについて，以下の問いに答えよ．
  1. 支点Aの反力の影響線を求めよ．
  2. 点Cのせん断力および曲げモーメントの影響線を求めよ．

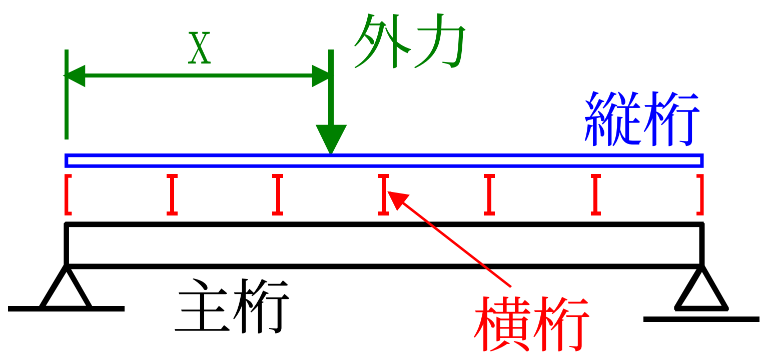


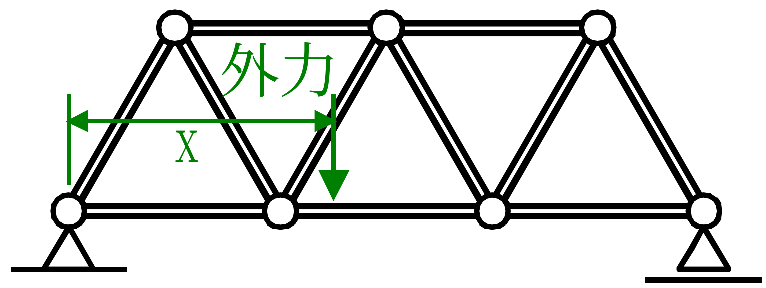
間接載荷の影響線

- 前回学んだ影響線：
  - 直接載荷の影響線：はりに直接外力がかかる

- 間接載荷の影響線
  - 床組（縦桁や横桁）を通じ間接的に外力がかかる

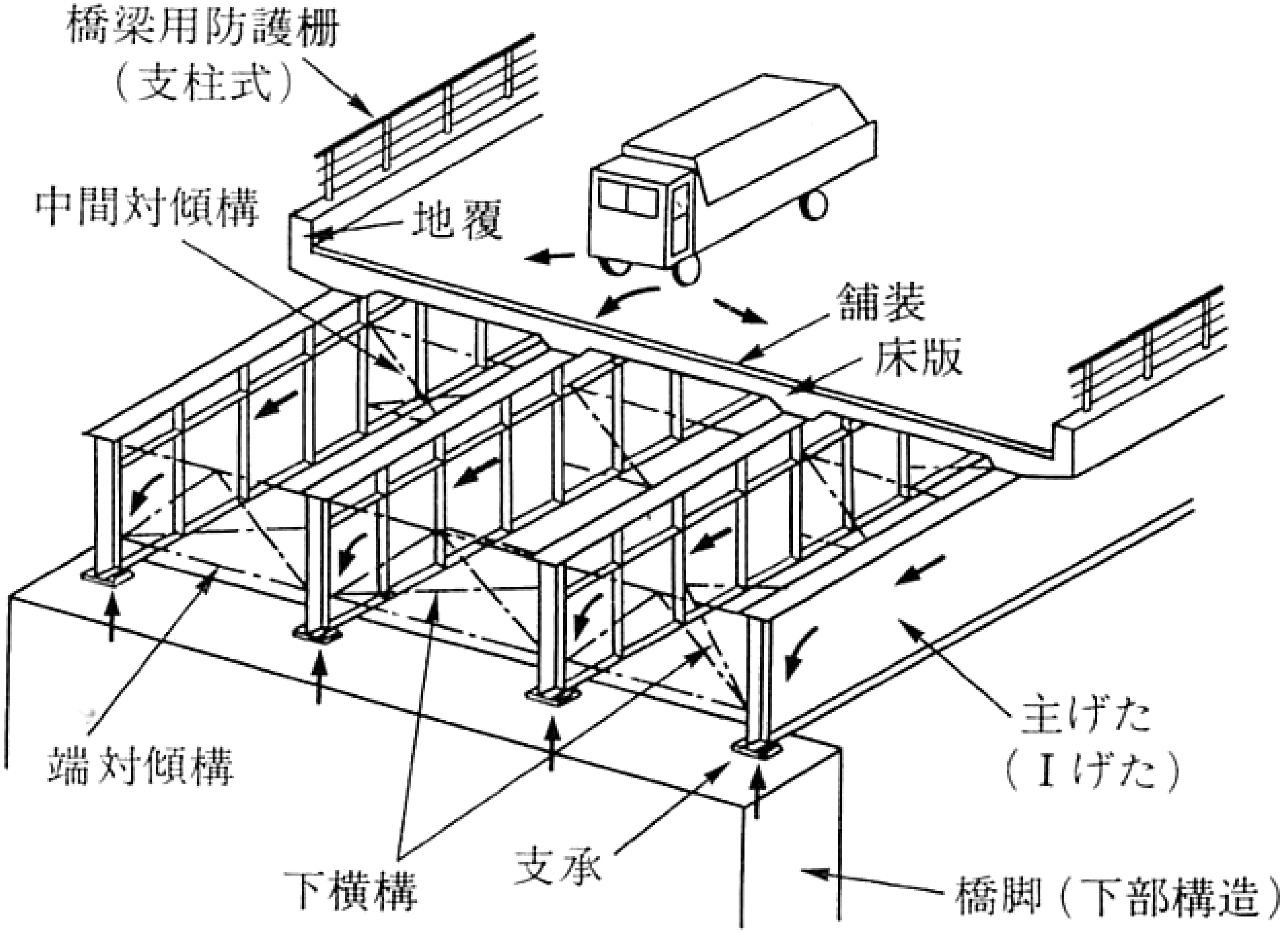
・床組のある桁橋（はり）　・トラス橋





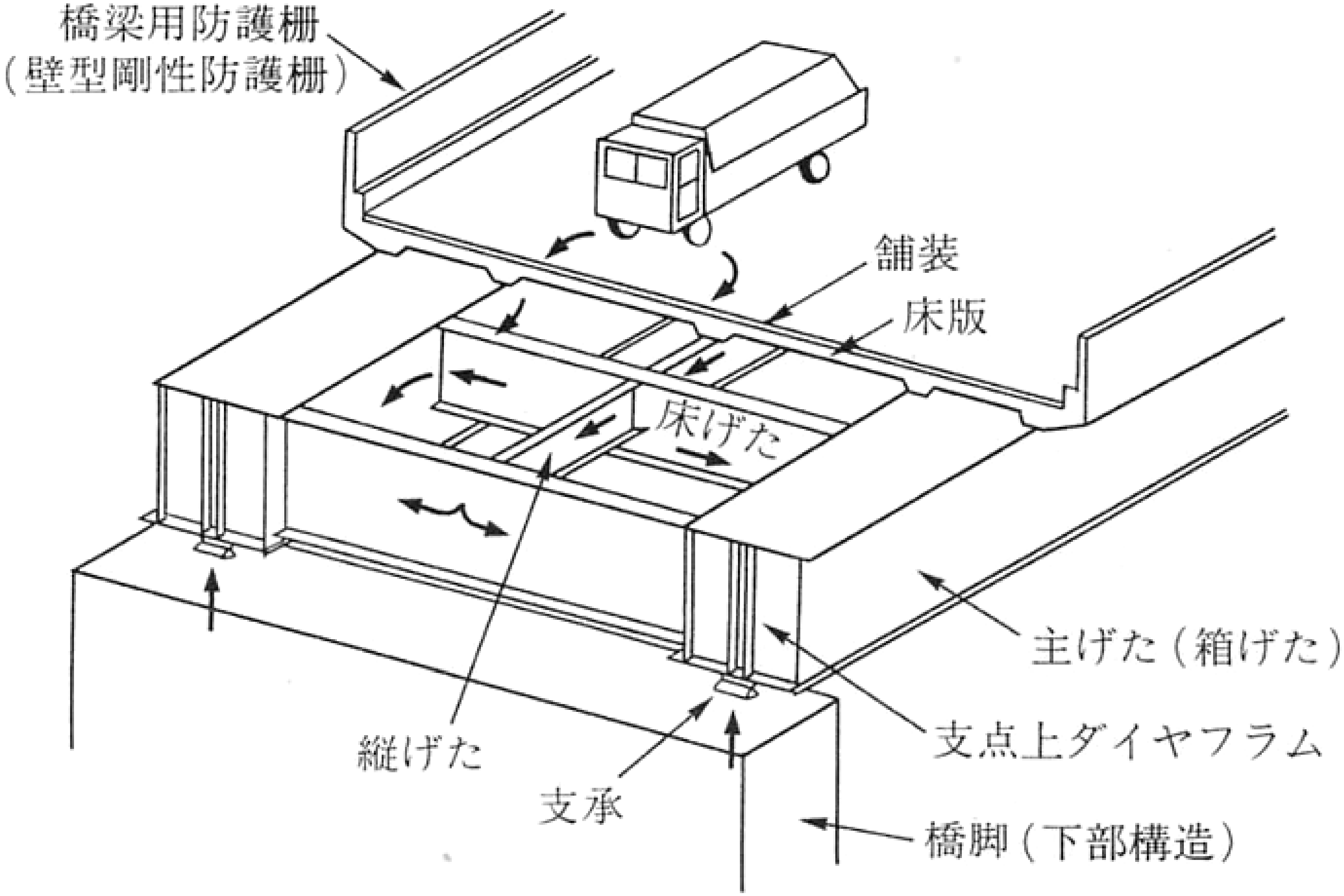
直接載荷の例：I桁橋

- 車両荷重は床版から主桁（はり）に直接伝わる



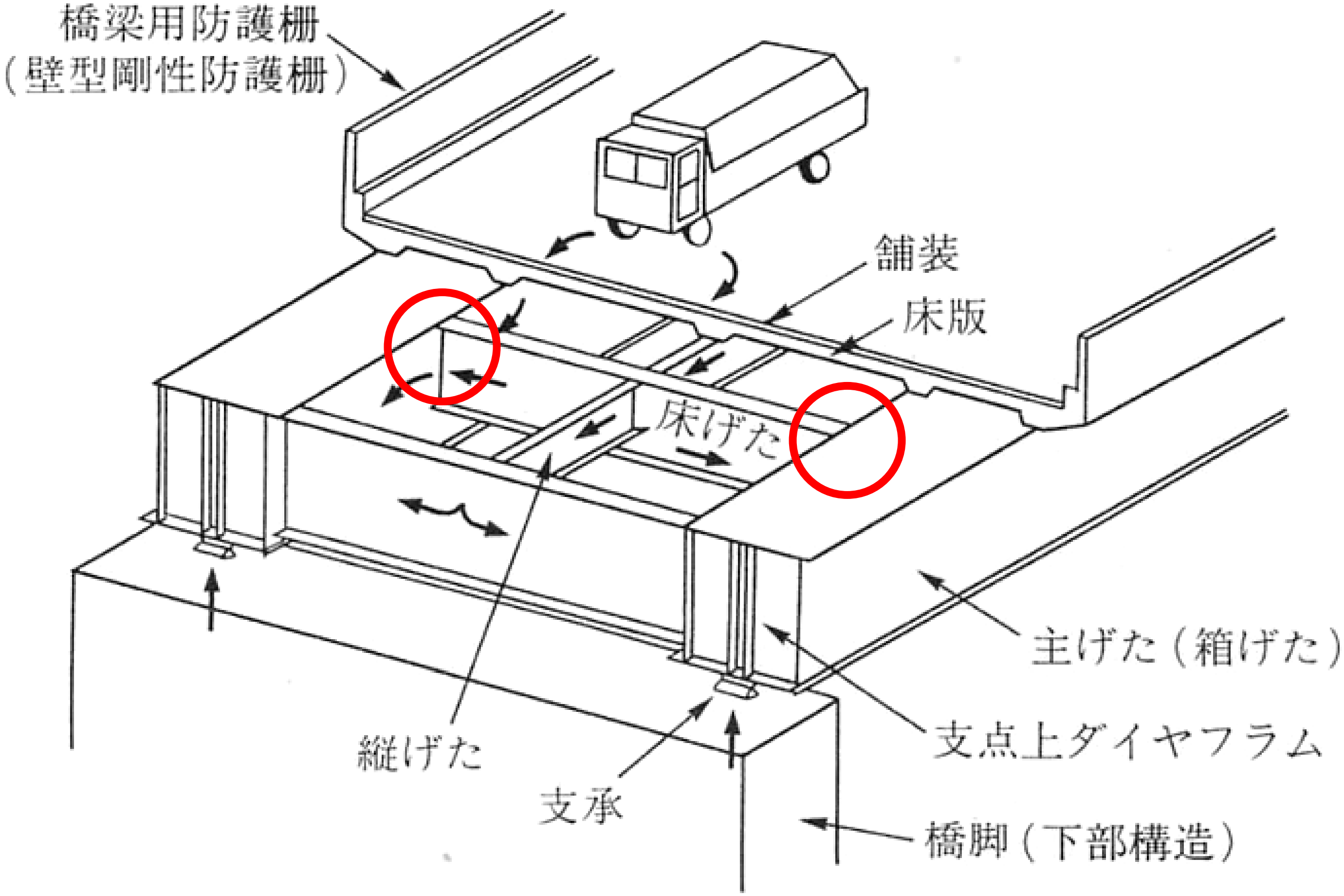
間接載荷の例:箱桁橋

- 車両荷重は 床版→縦桁→横桁→主桁 と伝わる



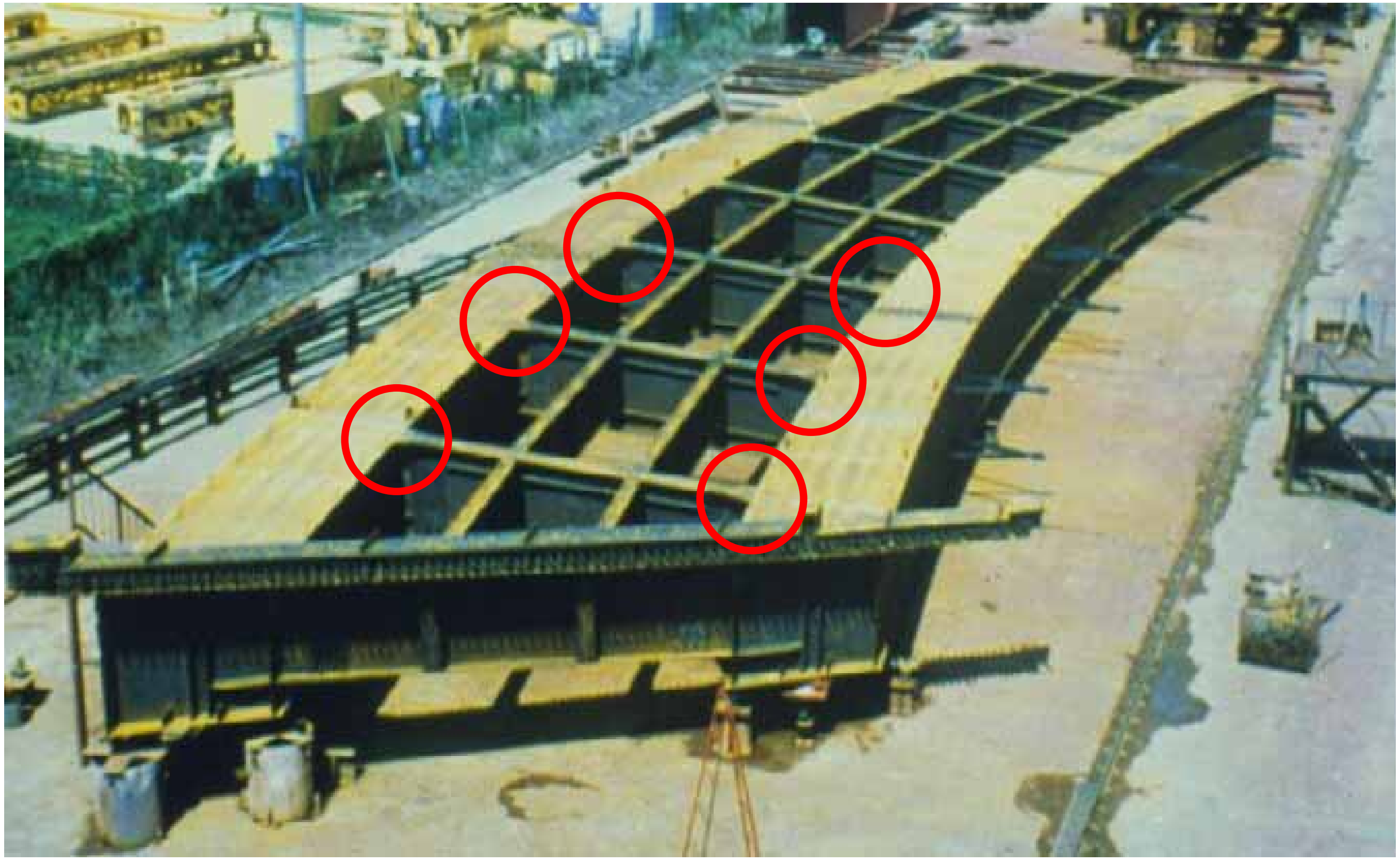
間接載荷の例：箱桁橋

- 車両荷重は横桁（床桁）位置で主桁に伝わる



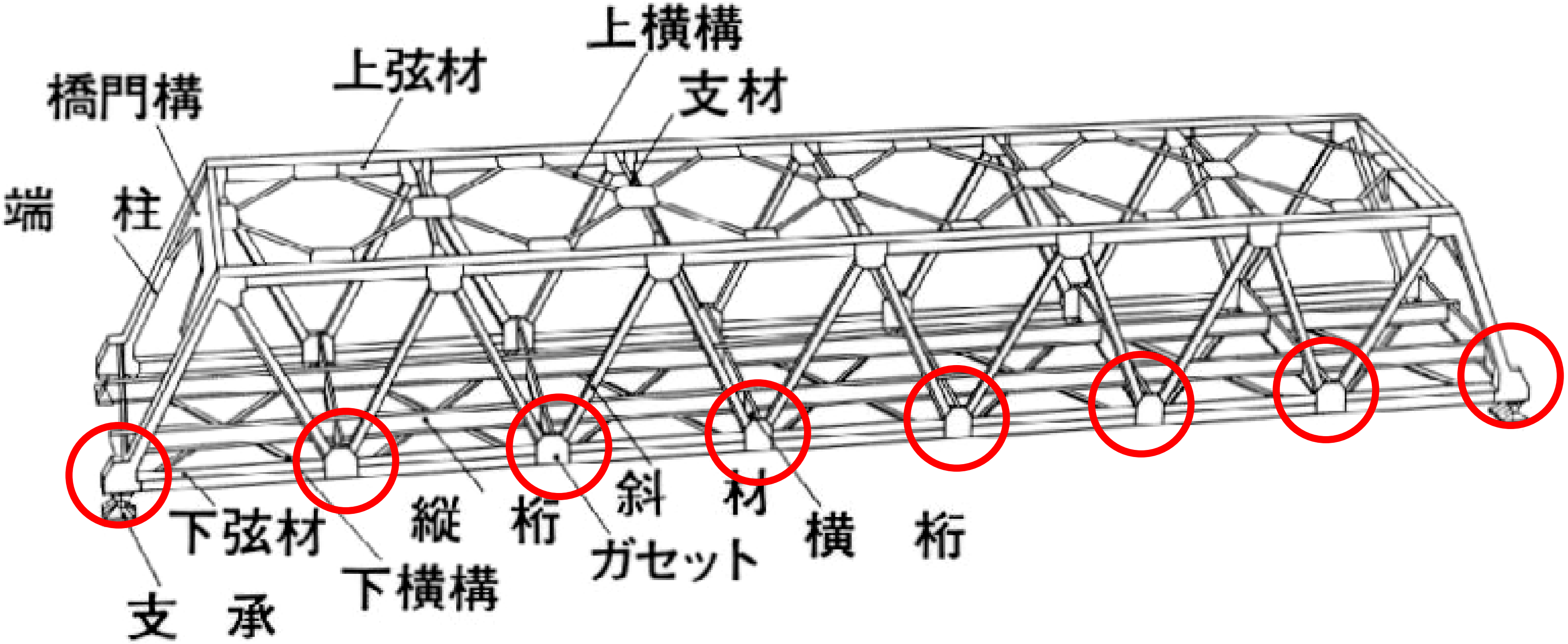
間接載荷の例：箱桁橋

- 車両荷重は横桁位置で主桁に伝わる



間接載荷の例:トラス橋

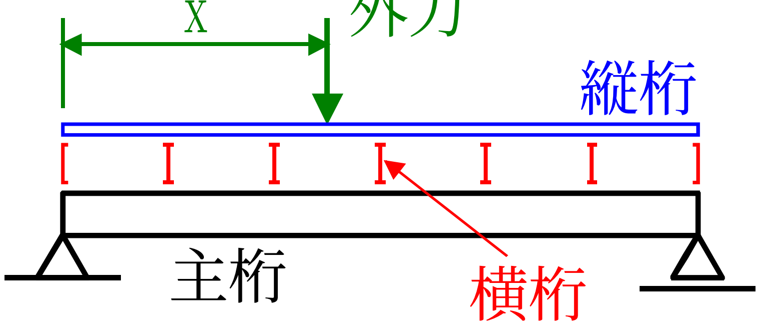
- 車両荷重はトラスの節点に伝わる：トラスの仮定
  - トラス橋の場合，横桁はトラスの節点に連結

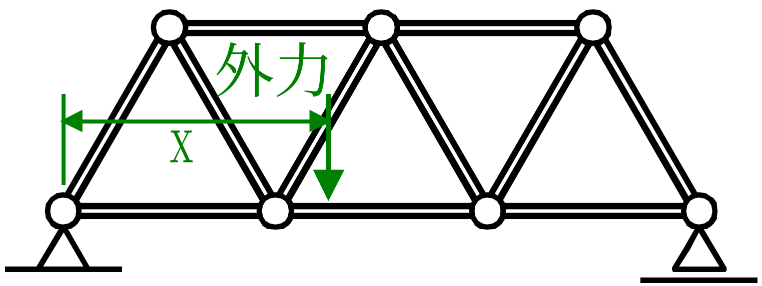


間接載荷の影響線

- 床組のある桁橋（はり），トラス橋：
  - 縦桁や横桁を通じて，間接的に外力がかかる

・床組のある桁橋（はり）　・トラス橋

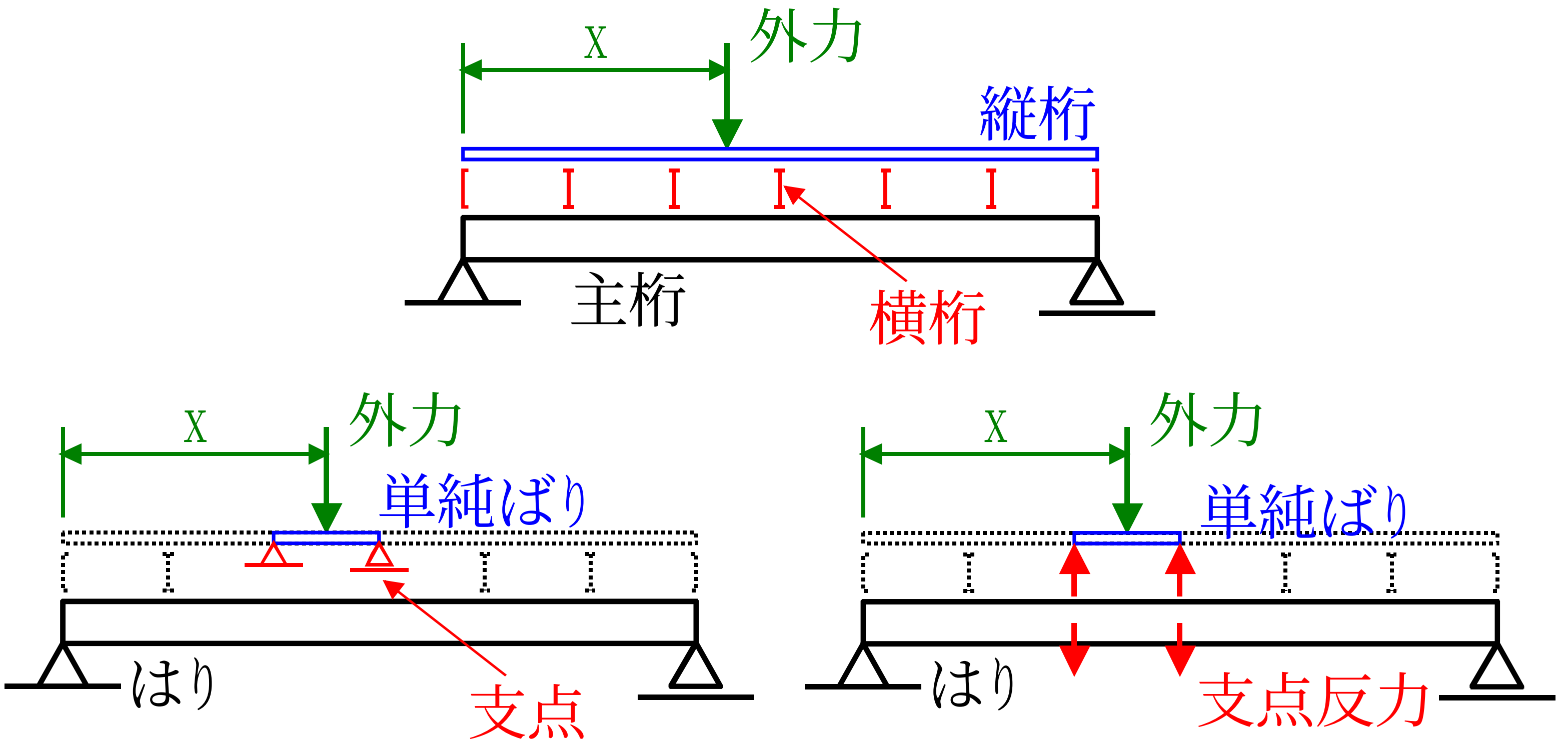




- この状況を再現した影響線を考える

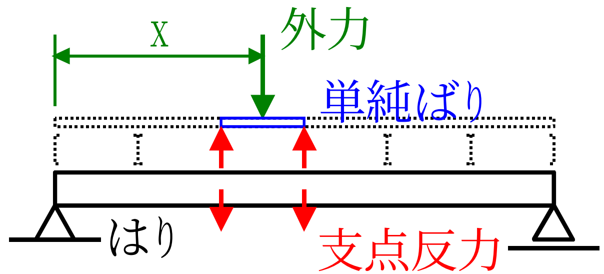
間接載荷の影響線の考え方

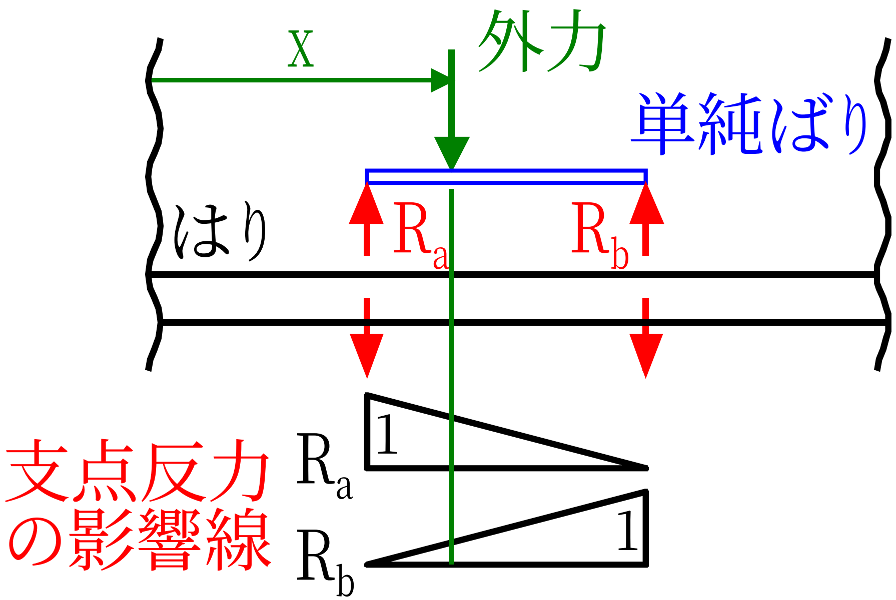
- 「縦桁＝横桁を支点とする単純ばり」と考える
  - 外力は縦桁の支点反力として主桁に伝わる
  - 床組のある桁橋（はり）



間接載荷の影響線の考え方

- 外力は縦桁の<u>支点反力</u>として主桁に伝わる
  - 反力は荷重位置により直線的に変化



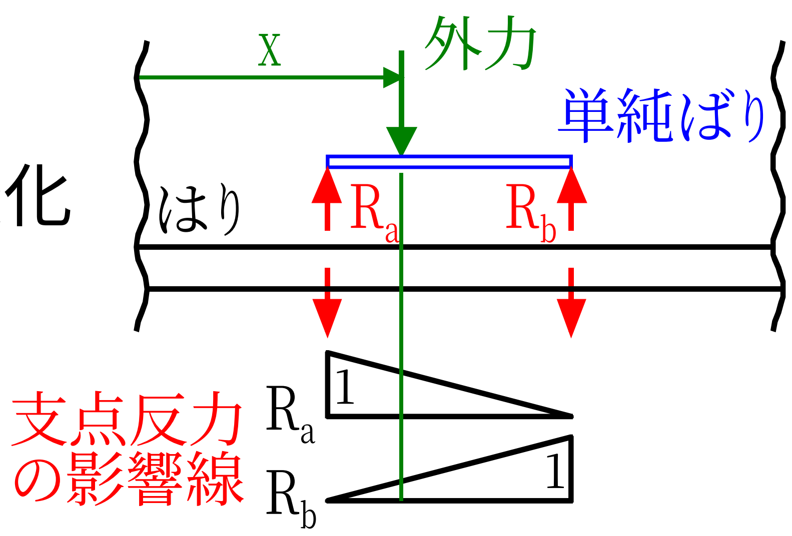


間接載荷の影響線の考え方

- 外力は縦桁の<u>支点反力</u>として主桁に伝わる
  - 反力は荷重位置により直線的に変化

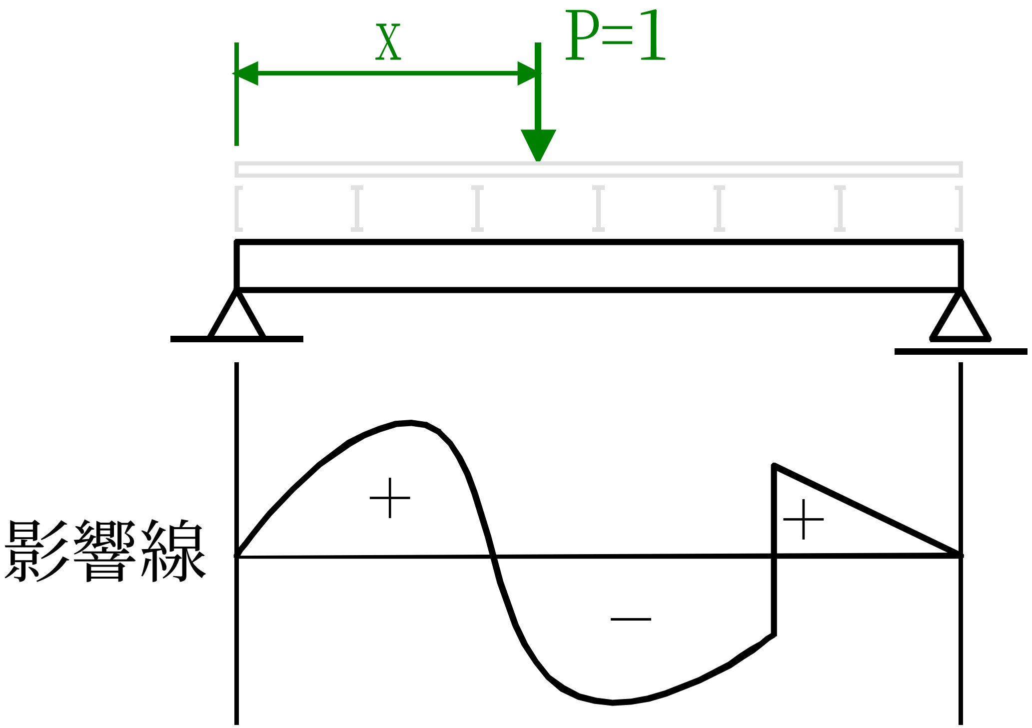
    → <u>物理量</u>も直線的に変化
    - ある点の断面力，たわみなど

- 間接載荷の影響線：
<u>横桁位置</u>間で直線的に変化
  - 直接載荷の影響線
  - 横桁位置に直接載荷



間接載荷の影響線の求め方

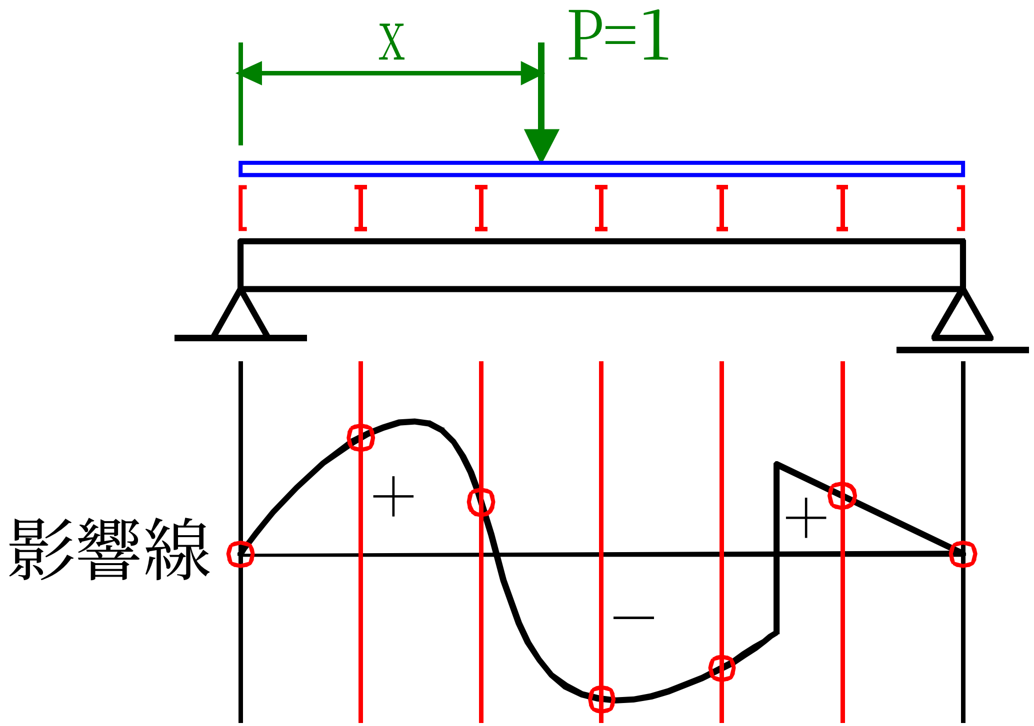
1. 直接載荷の影響線を求める
   - 縦桁や横桁は無視



間接載荷の影響線の求め方

2. 横桁位置での値を抜き出す

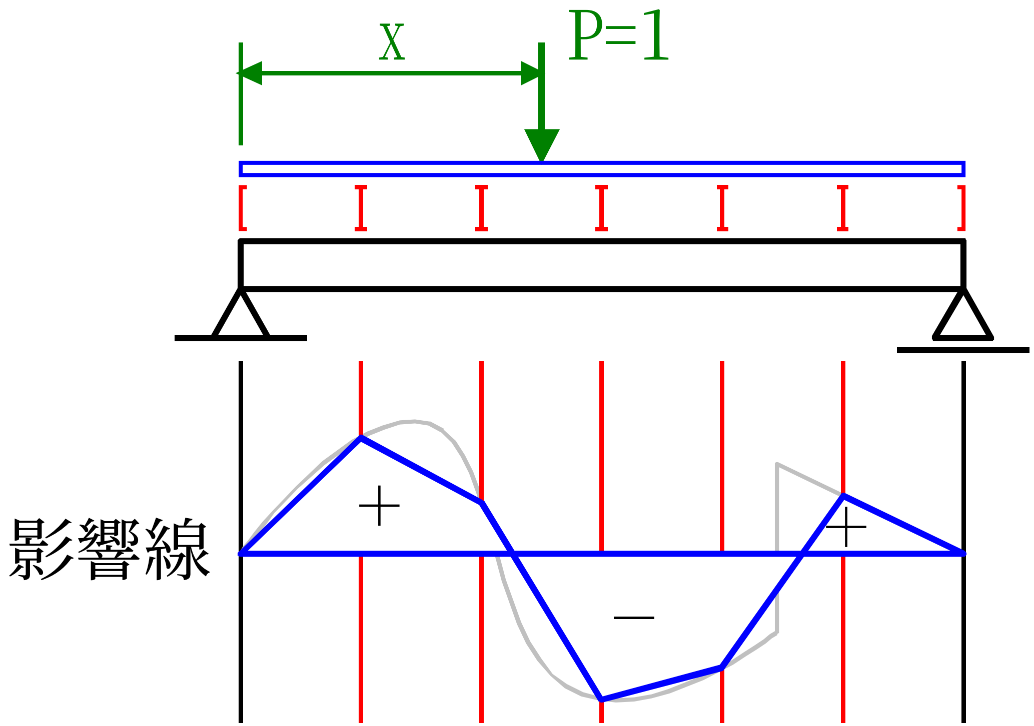
- 各点に直接載荷して求めてもいい



間接載荷の影響線の求め方

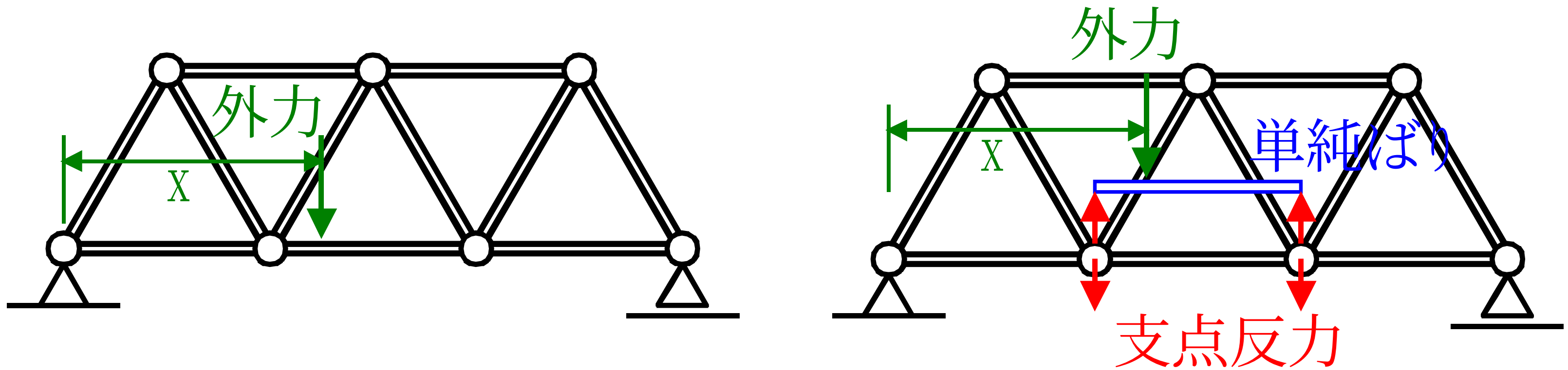
3．横桁位置の点を直線で結ぶ

- 横桁位置間で直線的に変化



トラスの影響線

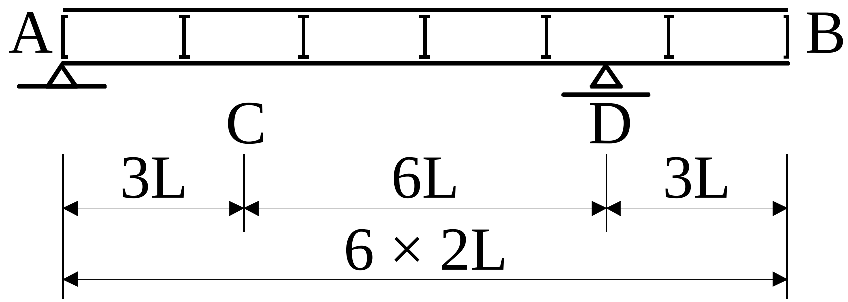
- トラス：必ず間接載荷として取り扱う
  - 横桁位置：節点
  - 移動荷重は節点に振り分け：トラスの仮定



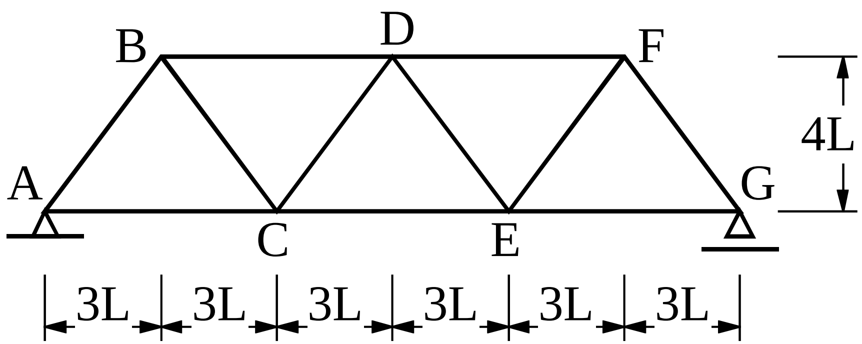
- 注意：荷重振り分けは荷重が通る節点に

練習問題

- 点CのSおよびMの影響線を求めよ．



- 荷重が下部（ACEG）を通るときのBD，CD，CEの軸力の影響線を求めよ．



構造物の安定性と静定性

- 構造物の安定・不安定
- 構造物の静定・不静定
- トラスの不静定次数
- ラーメンの不静定次数

構造物の安定性と静定性

- 橋などの構造物
  - 自重や外力をしっかり支える必要がある
- そのために考えるべきこと
  - 部材そのものを強くする（例えば，太くする）
  - 構造物やその部材を安定した構造にする
    - 適切な構造形態，支持方法を選ぶ
- 構造物の安定性，静定・不静定性
  - 構造物の支持方法，部材の結合方法

構造物の安定･不安定

- 安定：考えられる各種荷重を支持でき，
  支点反力，部材力を確定できること

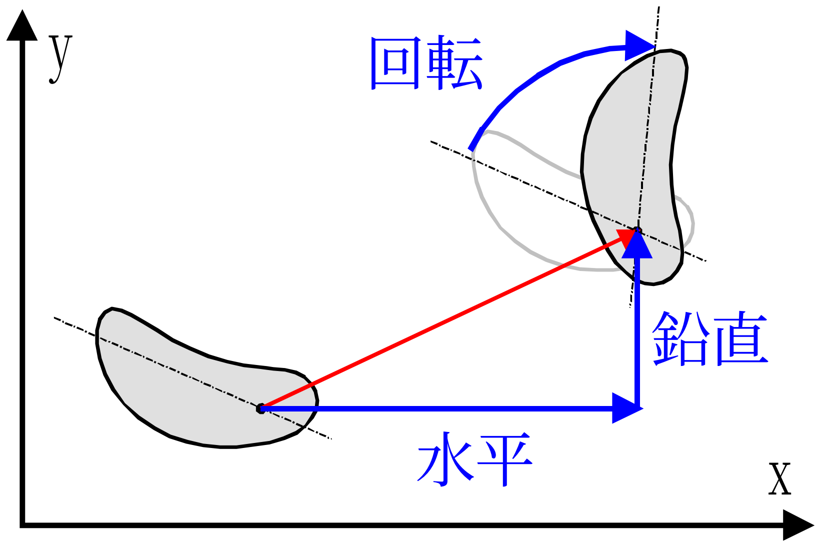
  - 荷重を支持：力を受けても静止状態を保てる
    - 変形はするが運動はしない

  ⇳ 両者は等価

  - 反力，部材力を確定：力のつり合いが成立する
    - 力の伝達がきちんと行われる

構造物の安定･不安定

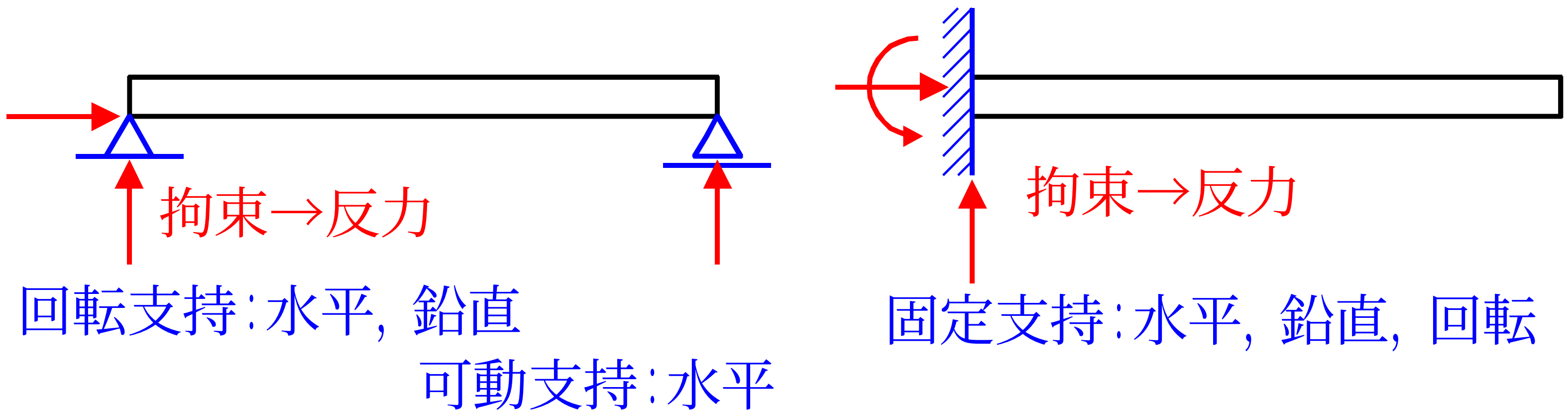
- 平面内（2次元）の物体：3つの自由度をもつ
  - 物体を支持する（静止させる）ためには，最低3つの拘束が必要



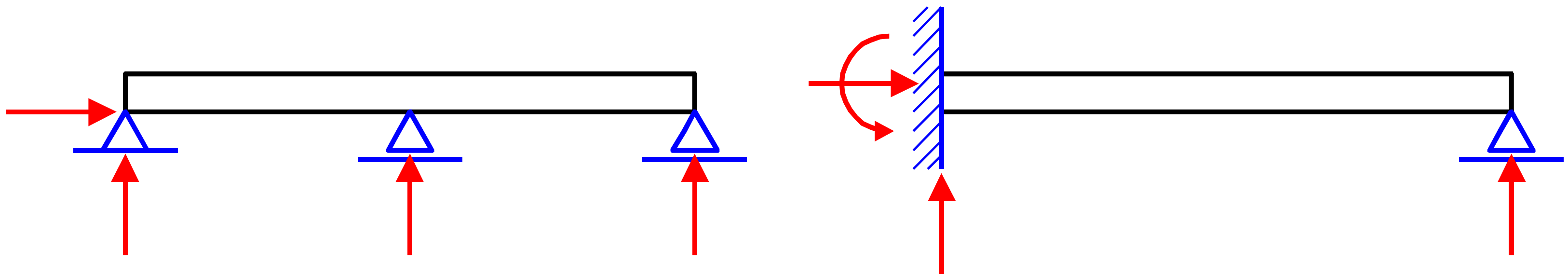
  - 構造物全体：支点により支持
  - 各部材：支点や他の部材により互いに支持

構造物の安定･不安定

● 安定な構造物の例

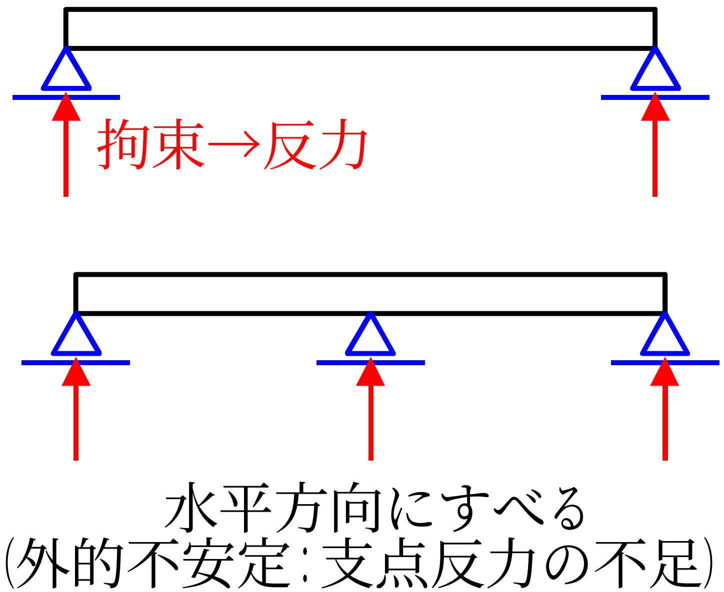


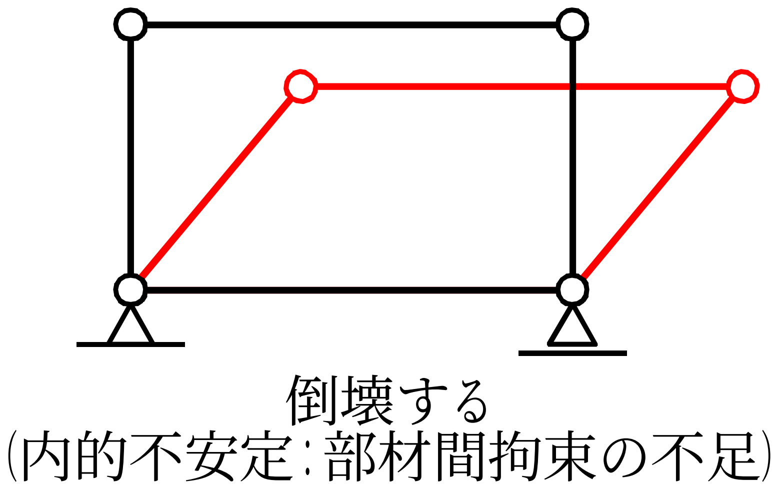
- 不静定構造：拘束が多い



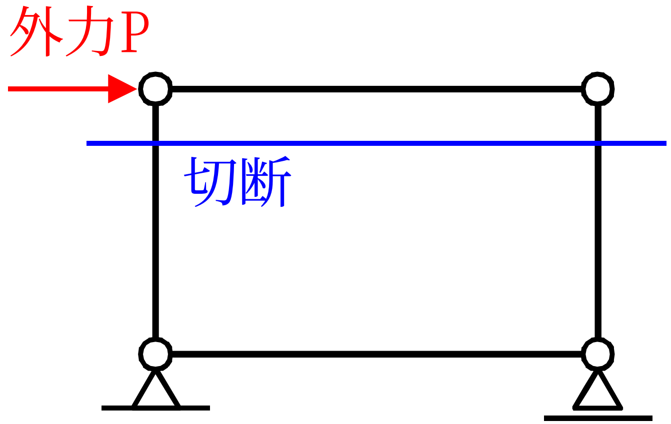
構造物の安定･不安定

- 不安定：各種荷重を支持できないこと
  - 力を加えたとき静止状態を維持できない
  - 力のつり合いが成立しない





構造物の安定･不安定



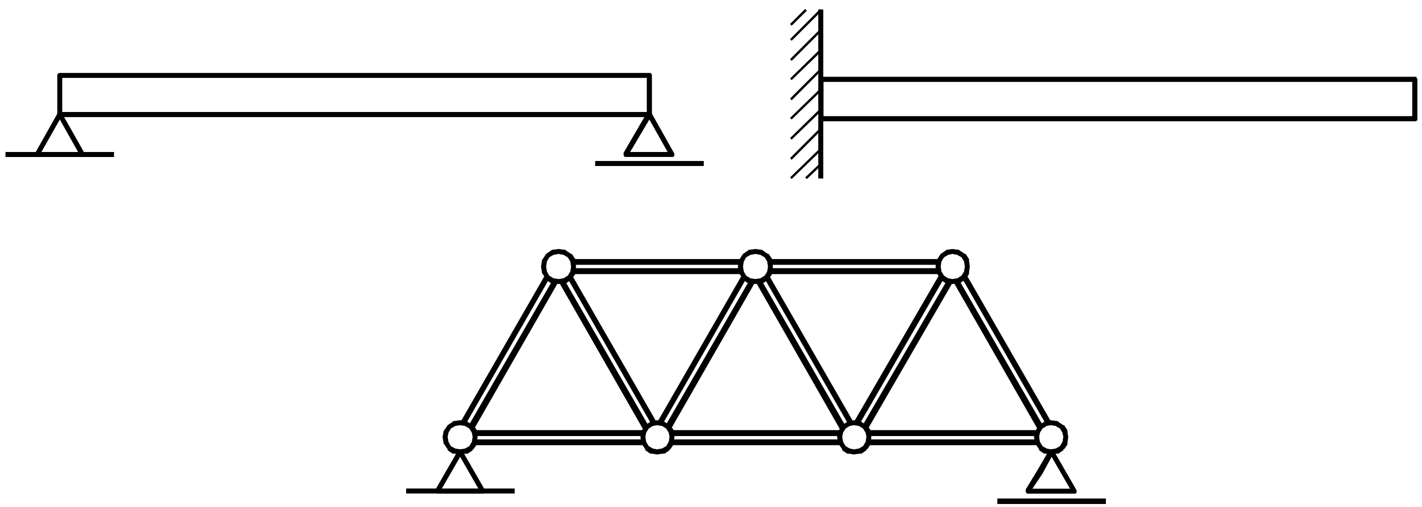
- 不安定トラスについて
  力のつり合いを考えてみる
  - 切断して力のつり合い

  - $\overrightarrow{\Sigma H}=P=0$ ？
  - 力のつり合い不成立 ＝ 静止状態を保てない

- 安定の定義：反力，部材力を確定 ＝ 荷重を支持

構造物の静定･不静定

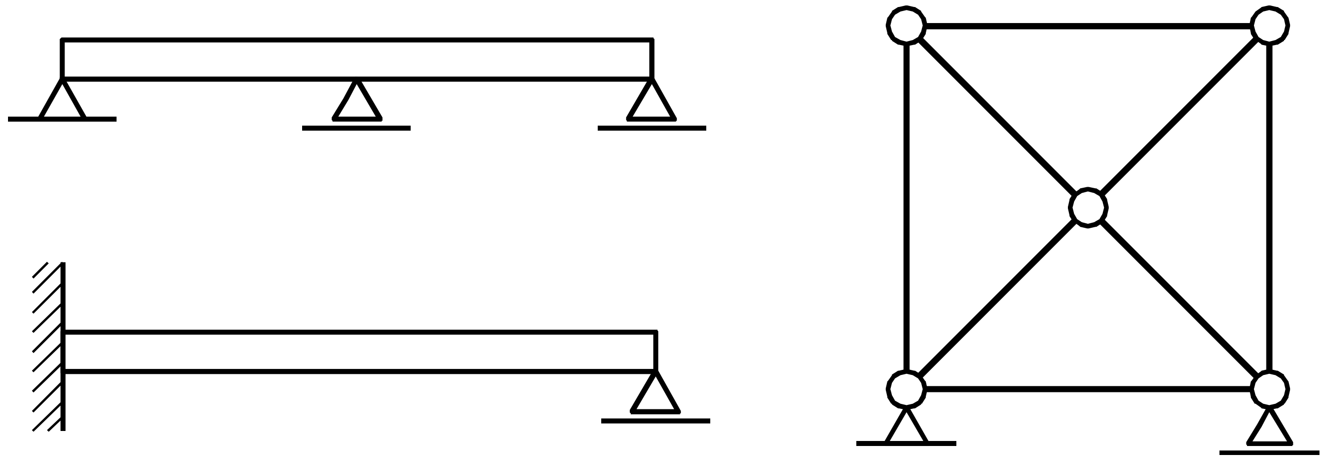
- 静定：力のつり合いのみで
  支点反力，部材力を確定できること
  - 未知の反力，部材力の数＝つり合い式の数



※これまで扱ってきた構造はすべて静定

構造物の静定･不静定

- 不静定：つり合い式を立てても
  反力，部材力が得られない
  - 未知の反力，部材力の数＞つり合い式の数



※不安定：未知力の数＜つり合い式の数
反力，部材力＝部材を拘束する力

構造物の安定性と静定性

- 安定：考えられる各種荷重を支持でき，
  支点反力，部材力を確定できること
  - 静　定：未知力の数＝つり合い式の数
  - 不静定：未知力の数＞つり合い式の数
- 不安定：各種荷重を支持できない
  - 未知力の数＜つり合い式の数
    - 反力，部材力＝部材を拘束する力
    - つり合い式＝各部材で３＝必要な拘束力の数

構造物の静定･不静定

- 静定（不静定）は外的，内的に分けられる
  - 外的静定：　構造全体の力のつり合いのみで支点反力を確定できる
  - 内的静定：　反力が既知のとき，力のつり合いで部材力を確定できる
  - 全体的静定：力のつり合いのみで支点反力，部材力を確定できること

構造物の不静定性

- 不静定：未知力の数＞つり合い式の数

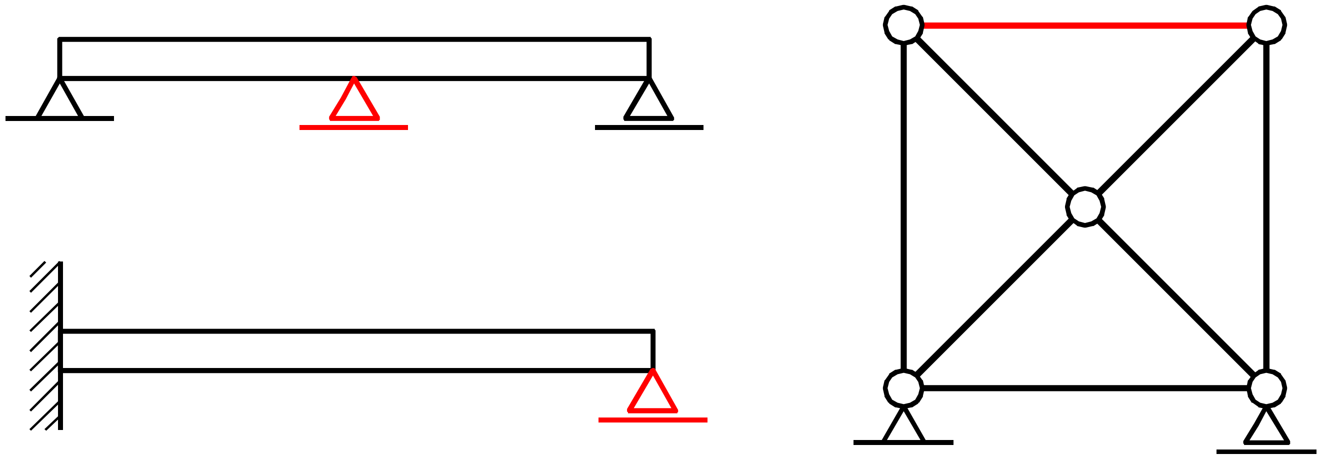
- 不静定性の程度を「不静定次数」で表す
  - 不静定次数＝未知力の数－つり合い式の数
    「未知力に対してつり合い式がいくつ足りないか」

    - 不静定次数＝０：静定
    - 不静定次数＞０：不静定
    - 不静定次数＜０：不安定

  - 不静定次数＝ｎ（ｎ＞０）：「ｎ次」不静定
    - 不静定次数＝１：1次不静定

構造物の不静定性

- １次不静定の例

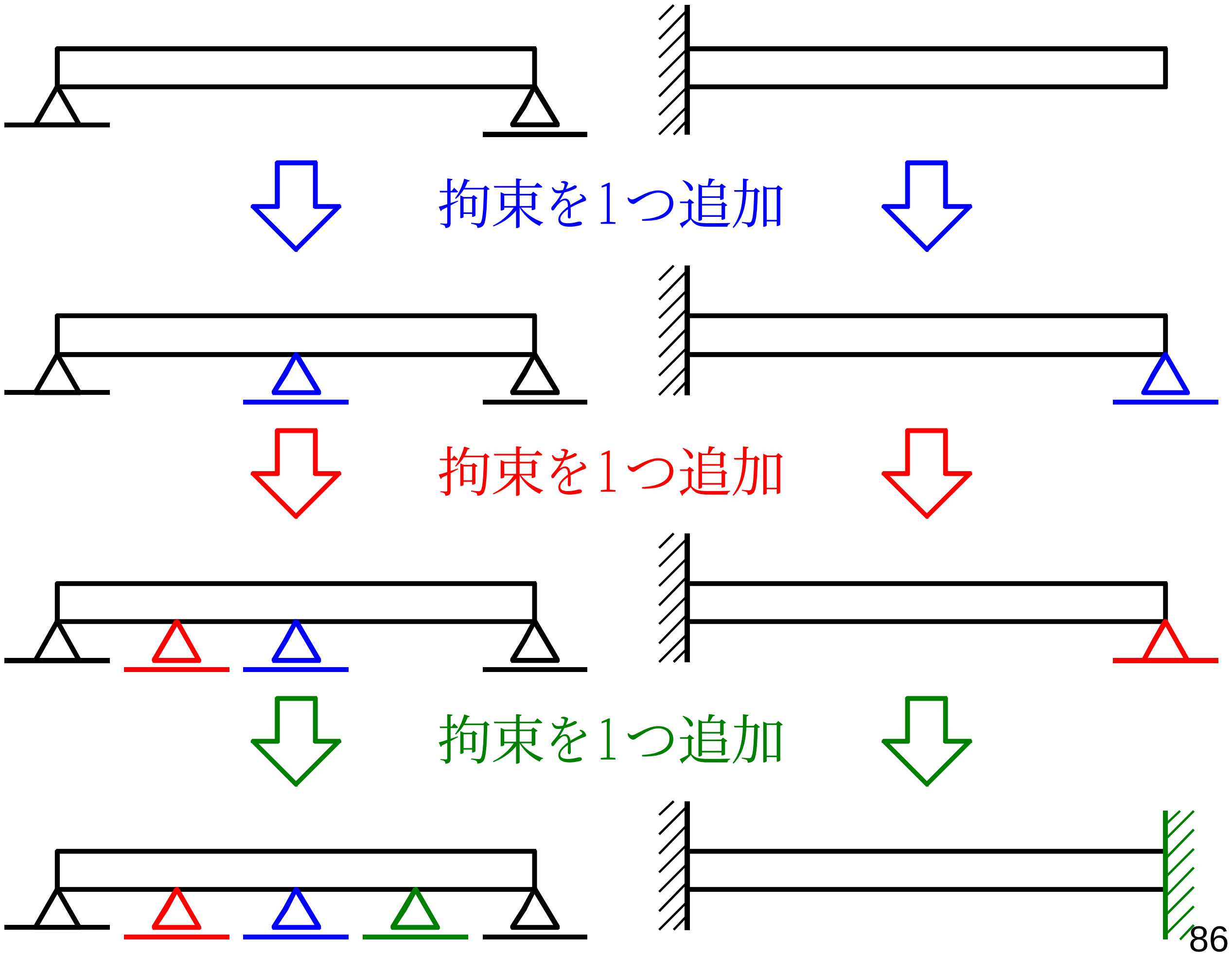


- 1次不静定：静定にひとつ<u>拘束</u>を加えたもの

  支点や部材

構造物の不静定性

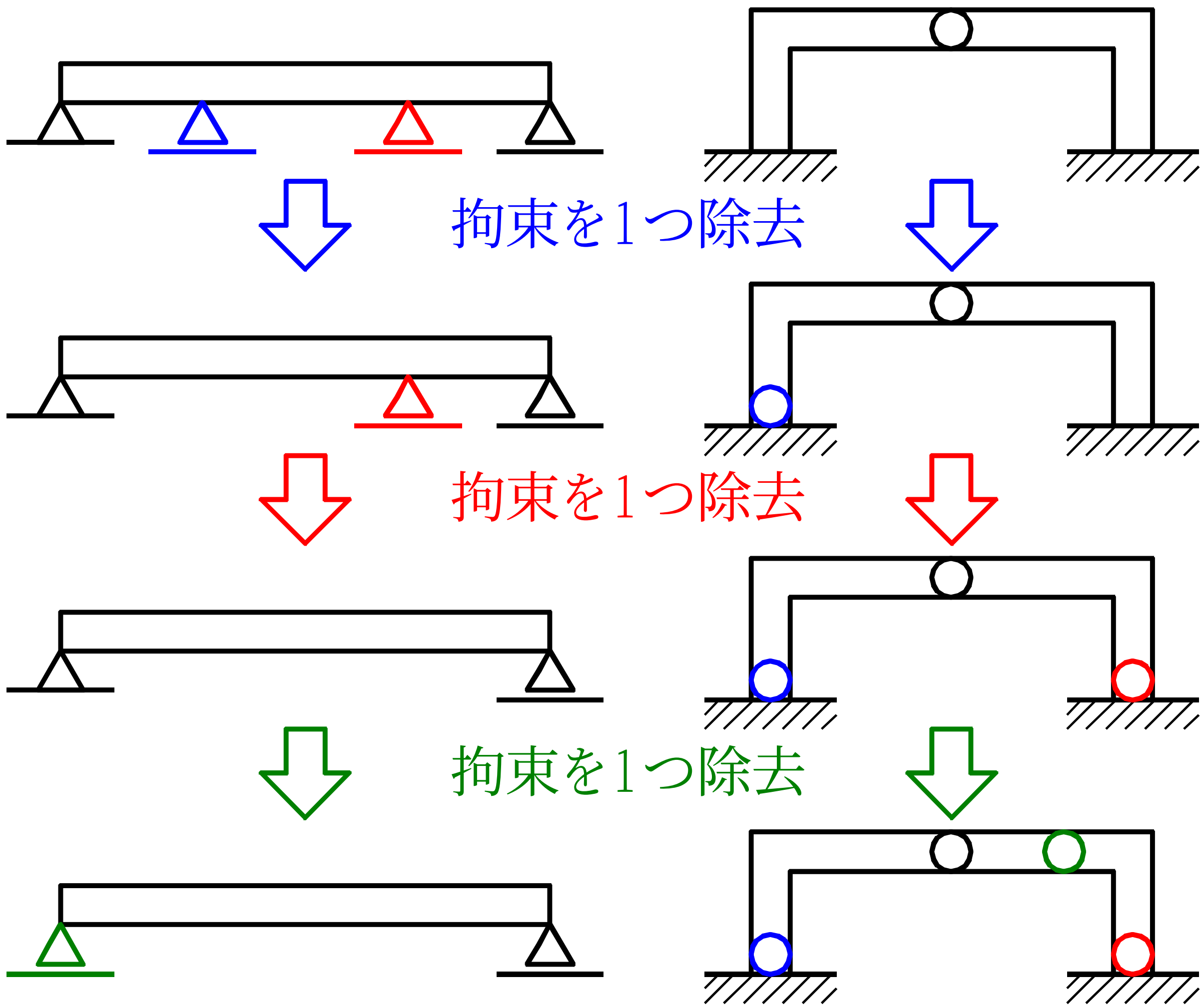
- 不静定次数：拘束を１つ加えるごとに１増える
  - 静定
  - １次不静定
  - ２次不静定
  - ３次不静定



構造物の不静定性

● 不静定次数：拘束を１つ除去すると１減る

- ・２次不静定
- ・１次不静定
- ・静定
- ・不安定



構造物の不静定性

- 不静定次数＝未知数の数－つり合い式の数
  - 拘束を１つ加えるごとに１増える
  - 拘束を１つ除去すると１減る
  - 不静定次数は外的，内的，全体の
    それぞれについて計算できる
  - トラスの不静定次数：簡単に求めることができる
  - ラーメンの不静定次数：慣れが必要

トラスの不静定次数

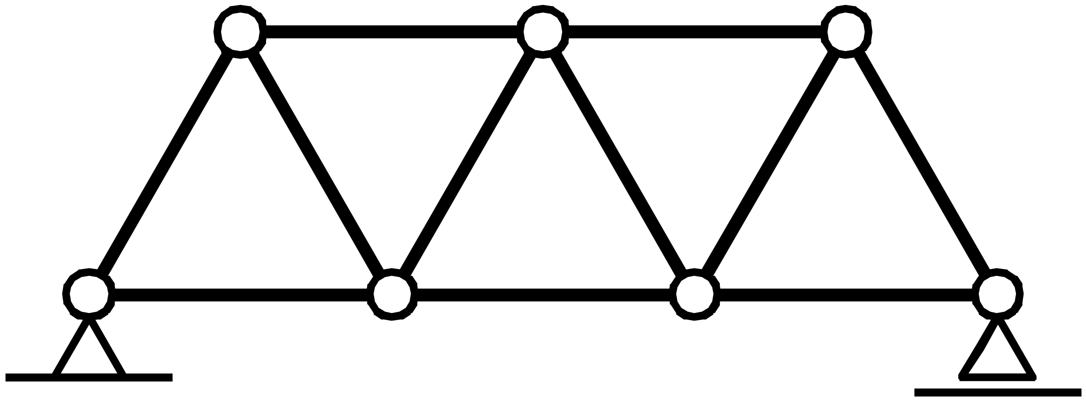
- トラス：部材に軸力のみ作用（部材軸力：一定）
  - 未知力の数：支点反力：ｒ個
    部材力　：部材数＝m個
  - つり合い式：節点数×２＝２ｊ（ｊ：節点数）

  - 不静定次数は以下の式のように求められる

	未知力	つり合い式	不静定次数
外的	r	3	r－3
内的	m	２ｊ－３	m－２ｊ＋3
全体	m＋ｒ	２ｊ	m＋ｒ－２ｊ

トラスの不静定次数

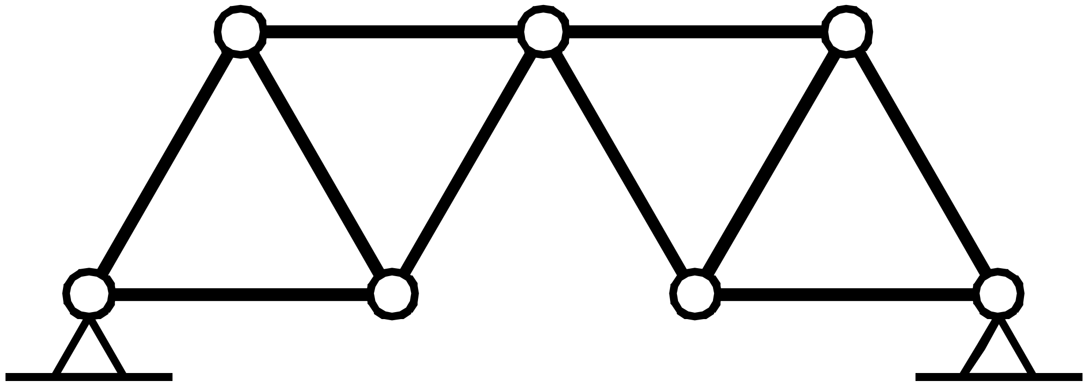
- 例１



- 節点数ｊ＝７，部材数m＝１１，反力数ｒ＝３
  - ｒ－３＝０ → 外的に静定
  - m－２ｊ＋３＝０ → 内的に静定
  - m＋ｒ－２ｊ＝０ → 全体的に静定

トラスの不静定次数

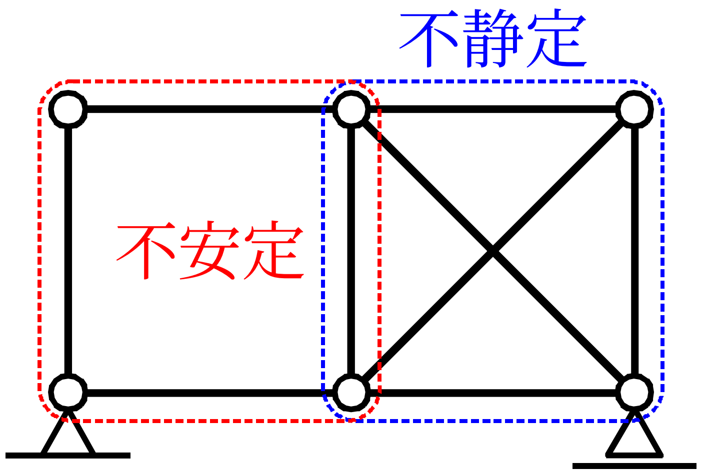
- 例２



- 節点数ｊ＝７，部材数m＝１０，反力数ｒ＝４
  - ｒ－３＝１ → 外的に１次不静定
  - m－２ｊ＋３＝-１ → 内的に不安定
  - m＋ｒ－２ｊ＝０ → 全体的に静定

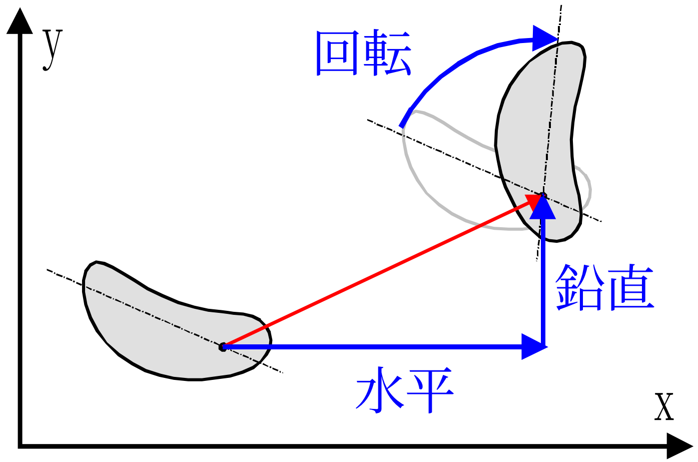
トラスの不静定次数

- 注意点
  - この式はトラスにしか使えない
    - 軸力部材のみ，部材内軸力一定が前提
  - 適用できない場合がある
    - 例：節点ｊ＝6，部材m＝9，反力ｒ＝3
      - ｒ－3＝0
      - m－2ｊ＋3＝0
      - m＋ｒ－2ｊ＝0
      - しかし不安定



ラーメンの不静定次数

- ラーメン：Ｎ，Ｓ，Ｍが作用
  - トラスの算定式では不静定次数を求められない
  - 不静定次数＝未知力の数－つり合い式の数
    - 反力，部材力
      ＝部材を拘束する力
    - つり合い式の数
      ＝各部材で３
      ＝支持に必要な
      拘束力の数

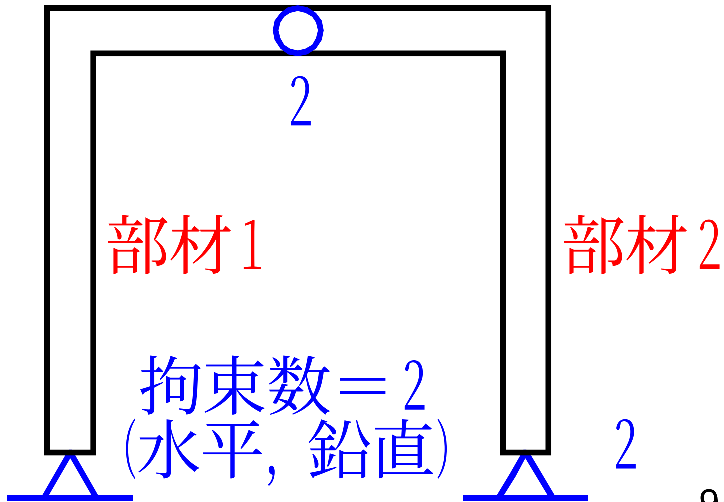


- ３つの支点反力で支持されれば（外的）静定

ラーメンの不静定次数の解法1

1. 構造物を各部材に分解
2. 各部材の拘束数を数え，足す→全拘束数ａ
   反力，部材間で支持している力の数
3. 部材数×３＝全部材のつり合い式の数ｂ
4. 不静定次数＝未知力の数ａ－つり合い式の数ｂ

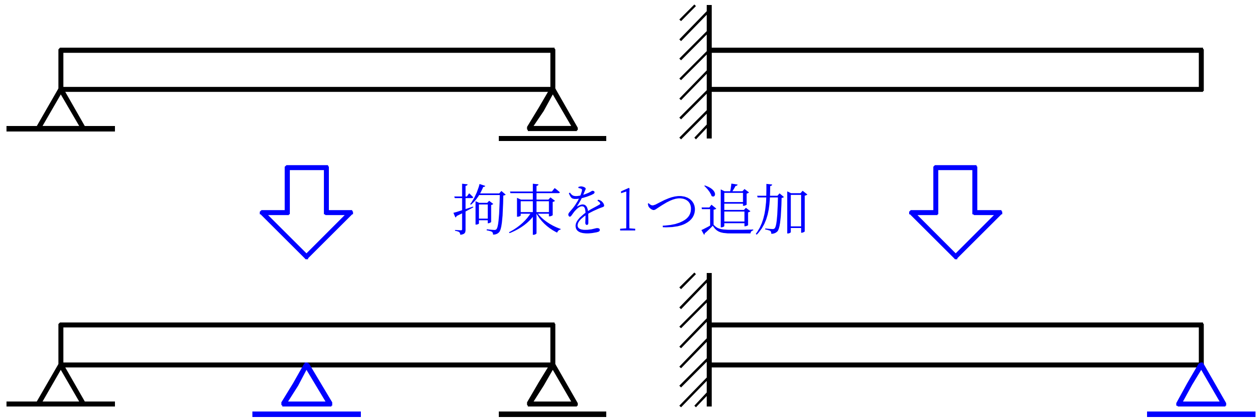
- 例
  - ａ＝２＋２＋２＝６
  - ｂ＝２×３＝６
  - 不静定次数＝６－６
    ＝０



ラーメンの不静定次数の解法2

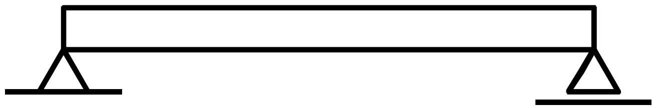
- 不静定次数の性質
  - 拘束を１つ加えるごとに１増える
  - 拘束を１つ除去すると１減る

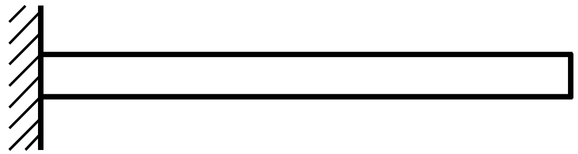
- 不静定次数が明らかな基本的な構造を考え，そこからどれだけ拘束が増減しているかを数える



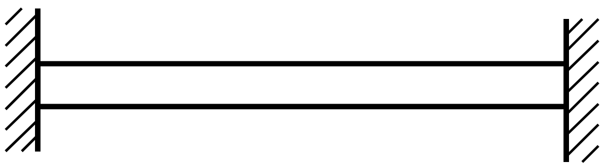
ラーメンの不静定次数の解法2

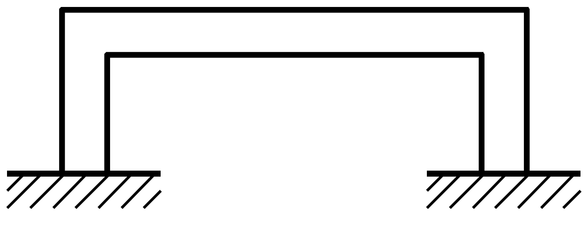
- 基本的な構造
  - 静定構造：１部材の拘束（反力）が３つ

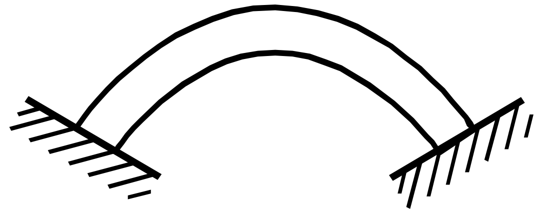




  - ３次不静定：
    両端固定の構造

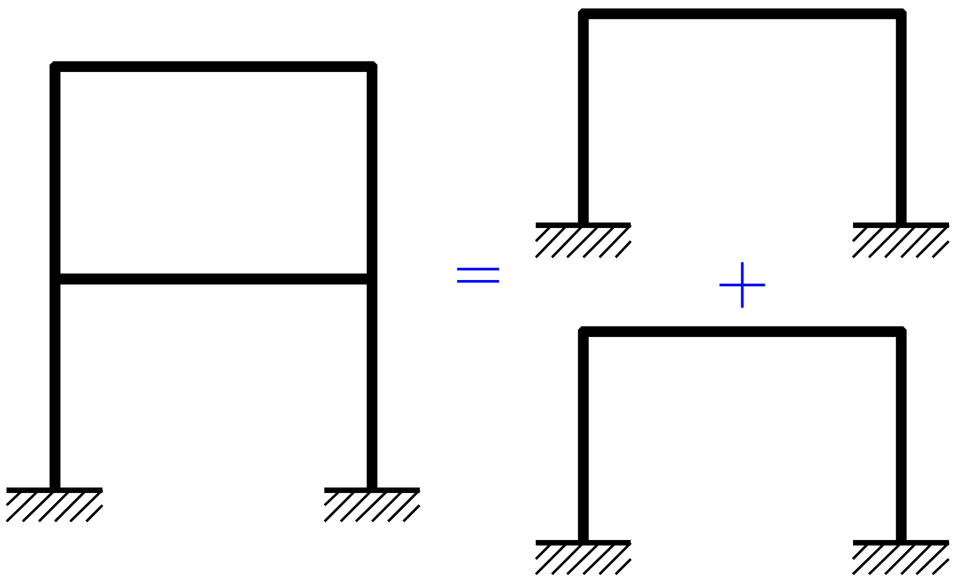






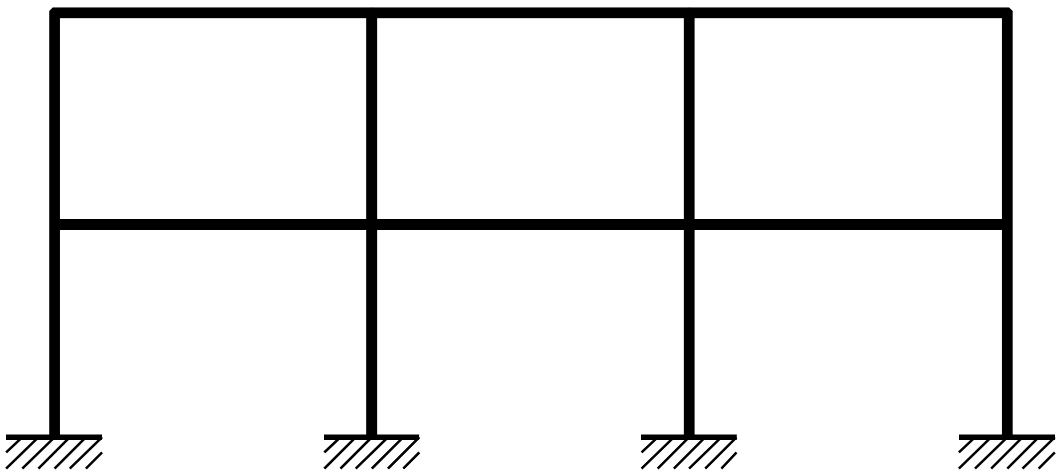
ラーメンの不静定次数の解法2

- 基本的な構造
  - 多層ラーメン：ラーメンの層数×３
    - ２層：３×２＝６次不静定



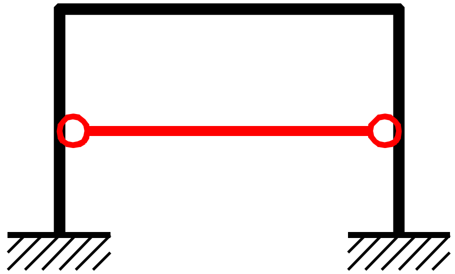
ラーメンの不静定次数の解法2

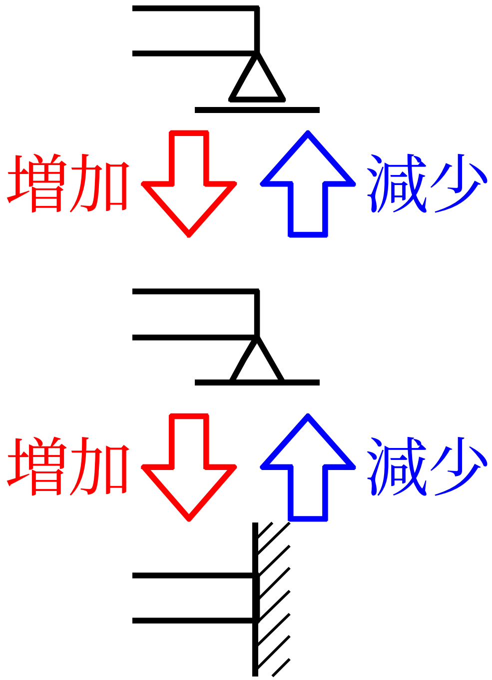
- 基本的な構造
  - 多層ラーメン：ラーメンの層数×３
    - 縦２層横３層：３×２×３＝１８次不静定

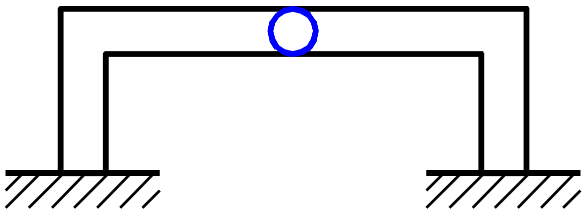


ラーメンの不静定次数の解法2

- 不静定次数の増減
  - 増加： 支点の追加
部材の挿入
  - 減少： 支点，部材の削除
ヒンジの挿入

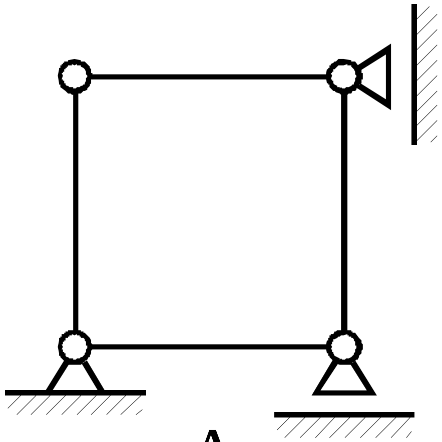




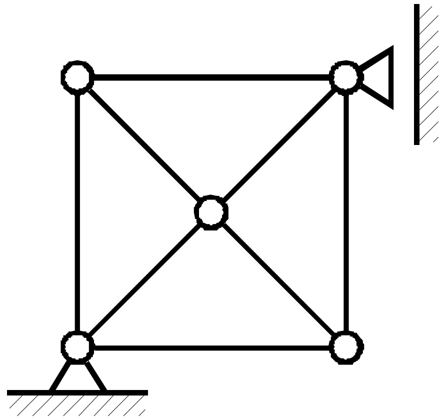


練習問題

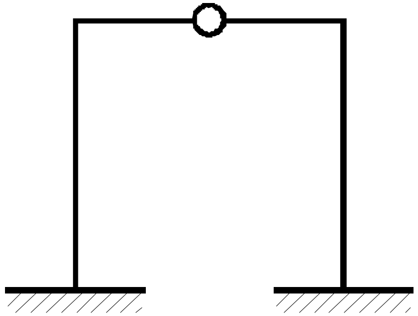
- 不静定次数を示せ．
  - トラス
  - ラーメン



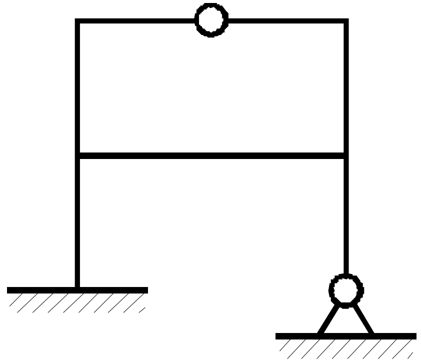
A



B



C



D

エネルギー原理

●仮想仕事の原理

●単位荷重法

●不静定構造物の解法

●相反作用の定理と影響線

エネルギー原理

- これまでの応用力学：
  - 「力」を使って問題を表現していた

- ここでは，エネルギー（仕事）を使って力学の問題を考える
  - 仕事：力によって物体を移動，変形させること
  - エネルギー：仕事に変換できるもの（能力）
  - 式の上で，仕事＝エネルギー：「力×距離」
    - エネルギー（仕事）：スカラー量
    - それに対し，力：ベクトル（向きを持つ）

エネルギー原理

- エネルギー保存則
  - 「閉じた系の中では，エネルギーの総和は一定」

  - 高校物理での「重力下の質点の運動」
    - 運動エネルギー＋位置エネルギー：一定

  - 応用力学での「はりやトラスの変形」
    - 外力による仕事＝<u>内力のする仕事</u>

      ひずみエネルギー

      → 仮想仕事の原理

仮想仕事の原理

- 基本はエネルギー保存則
  - 外力による仕事＝内力のする仕事

- 一種の思考実験

  ×力学的な現象を理解する

  ○力学の現象を数学的に表現し，展開する

  - 構造解析（ＦＥＭ等）の基本式の誘導
    - 力学的考察でなく，数学的演算のみで導ける
  - 有用な定理の誘導：単位荷重の定理，
    カスティリアノの定理，相反作用の定理など

仮想仕事の原理

● 外力による仕事＝内力のする仕事

外力×変位　　　　内力×内部変形

応力×ひずみ，モーメント×曲率

- 外力 ←互いに関連→ 内力：力のつり合い
  - はりの例：外力→曲げモーメント分布
- 変位 ←互いに関連→ 内部変形：変形の適合条件
  - はりの例： ベルヌイ・オイラーの仮定
    →たわみとひずみ（曲率）の関係

仮想仕事の原理

- 外力 ←互いに関連→ 内力：力のつり合い
- 変位 ←互いに関連→ 内部変形：変形の適合条件

- 通常，力と変形は因果関係にある
  - 変形は力によって生じている

- 仮想仕事の原理：力と変形は独立と考える
  - 一種の思考実験
  - 変形は力とは関係なしに生じている

仮想仕事の原理

- 力と変形が独立でも，エネルギー保存則は成立
  - 力のつり合い，変形の適合条件が成立すれば，（外力と内力，変位と内部変形の対応関係）
  - 外力による仕事＝内力のする仕事
    外力×変位　　　内力×内部変形

- ある構造物を考える
  - 外力Ｐとそれに対応する内力σ
  - 変位ｖとそれに対応する内部変形ε

  } 独立
  - このとき，外力Ｐ×変位ｖ＝内力σ×内部変形ε

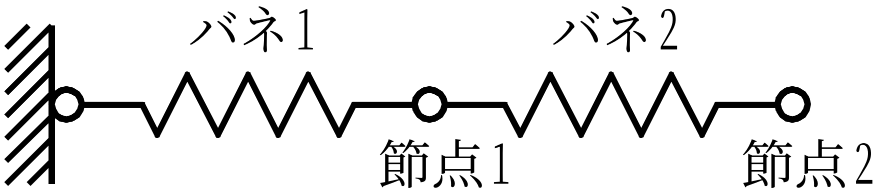
仮想仕事の原理

- 仮想仕事
  - 力と変形は独立：別々の物理モデル
  - とりあえず，片方を実在のもの，
    もう片方を仮想のものとする
    現実のものでない，任意に設定できる

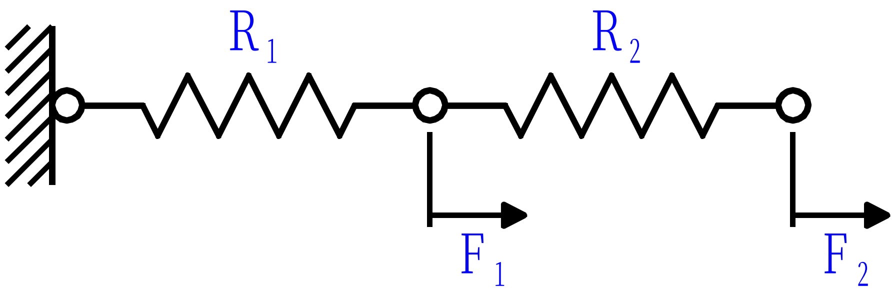
  - 仮想仕事＝実在の力×仮想変位
    → 仮想変位の原理
  - 仮想仕事＝仮想の力×実変位 → 仮想力の原理

仮想仕事の原理

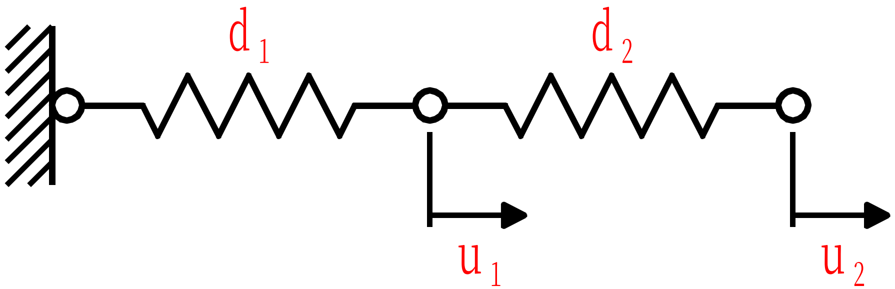
- 簡単な例：直列バネ（トラス）



  - 力：　外力 F とバネの復元力（内力） R



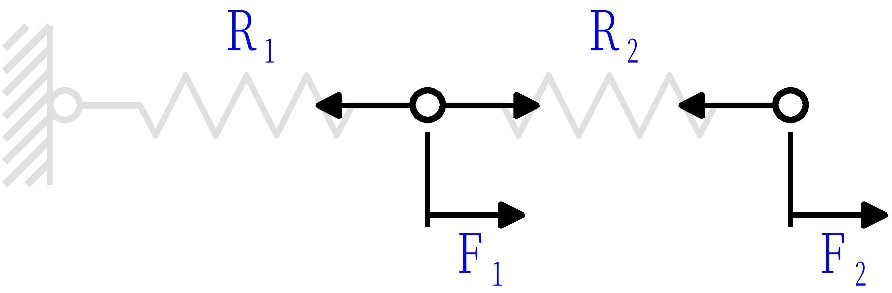
  - 変形：節点変位 u とバネの伸び（内部変形） d



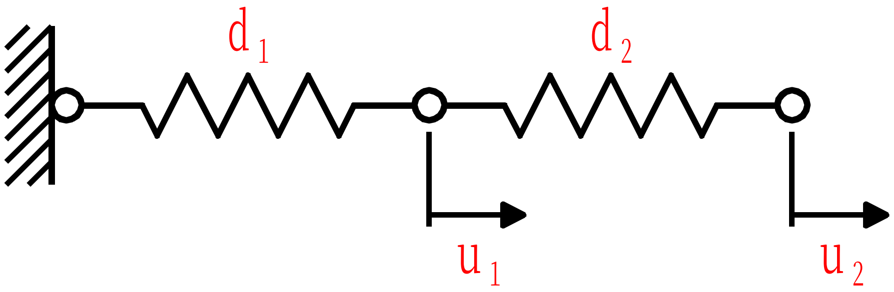
  - 力と変形は独立

仮想仕事の原理

- 簡単な例：直列バネ
  - 力のつり合い
    - $F_1 = R_1 - R_2$
    - $F_2 = R_2$



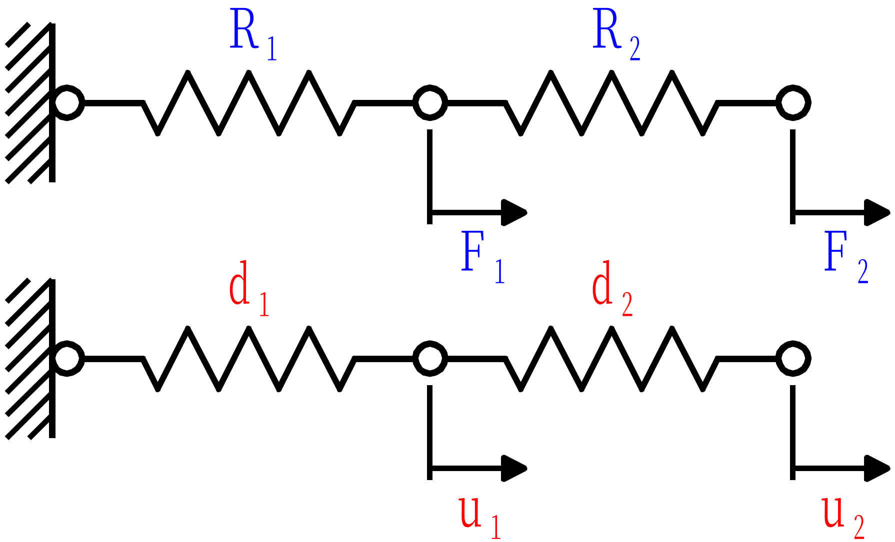
  - 変形の適合条件
    - $u_1 = d_1$
    - $u_2 - u_1 = d_2$



仮想仕事の原理

- 恒等式：$(R_1 - R_2)u_1 + R_2 u_2$
  $= R_1 u_1 + R_2 (u_2 - u_1)$

  ↑代入
  - $F_1 = R_1 - R_2$
  - $F_2 = R_2$
  - $u_1 = d_1$
  - $u_2 - u_1 = d_2$



- 仮想仕事の式：
  - $F_1 u_1 + F_2 u_2 = R_1 d_1 + R_2 d_2$

仮想仕事の原理

- 恒等式：力学的には何の意味もない

  ↑代入

  - 力のつり合い，変形の適合条件

- 仮想仕事の式
  - 一般的には，ΣＰｖ＝Σσε
  - 外力による仕事＝内力のする仕事

    外力Ｐ×変位ｖ　内力σ×内部変形ε
    - 力学的な考察から導かれたものではない
    - 力学の現象を数学的に表現し，展開する

仮想仕事の原理

- 仮想仕事の式
  - $\Sigma P v = \Sigma \sigma \varepsilon$
    - 力（P，σ）と変形（v，ε）は独立

- 仮想のものは，バー「￣」をつけて表す
  - 力は実在，変形は仮想：仮想変位の原理
    - $\Sigma P \bar{v} = \Sigma \sigma \bar{\varepsilon}$
  - 力は仮想，変形は実在：仮想力（荷重）の原理
    - $\Sigma \bar{P} v = \Sigma \bar{\sigma} \varepsilon$

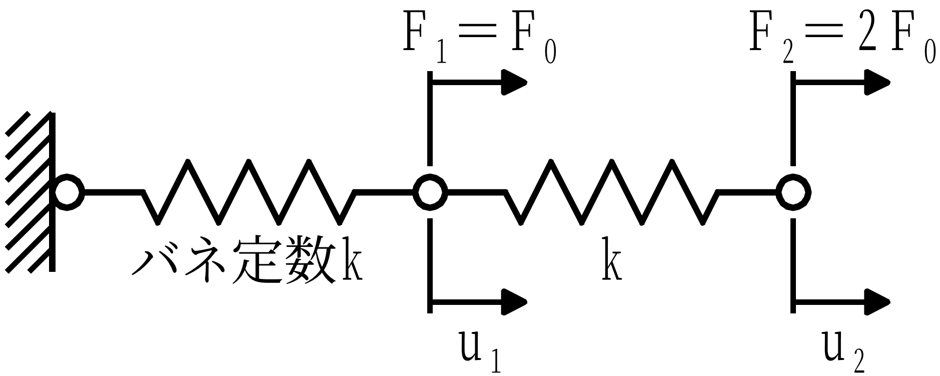
仮想仕事の原理の応用

- 仮想仕事の式
  - $\Sigma P \bar{v} = \Sigma \sigma \bar{\varepsilon}$ ：仮想変位の原理
  - $\Sigma \bar{P} v = \Sigma \bar{\sigma} \varepsilon$ ：仮想力（荷重）の原理

- 有用な定理の誘導
  - 単位荷重の定理 → たわみの解法：単位荷重法
  - カスティリアノの定理
  - エネルギー最小の原理
  - 相反作用の定理，ミューラー・ブレスローの定理
    → 影響線の解法

単位荷重の定理

- 具体的な例題を使って，単位荷重の定理を導く
  - 下図の直列バネの節点変位ｕ$_1$を求めよ



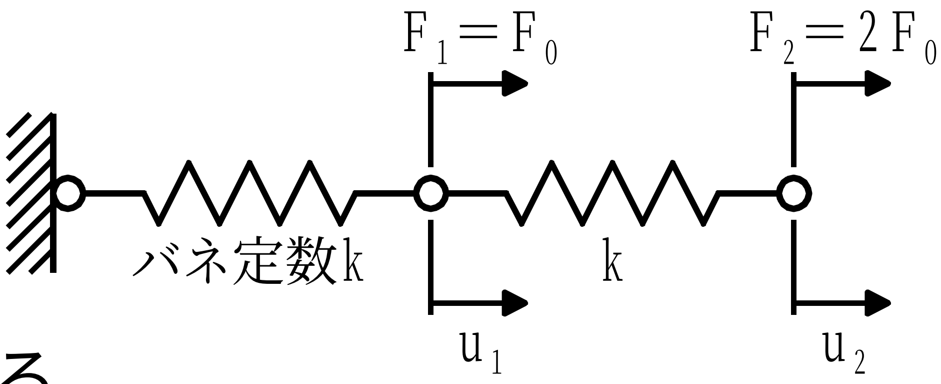
  - 求めるｕ$_1$は実際の変位

- 仮想仕事の式（仮想力の原理）を使う
  - $\bar{F}_1 u_1 + \bar{F}_2 u_2 = \bar{R}_1 d_1 + \bar{R}_2 d_2$

単位荷重の定理

- 仮想仕事の式：仮想力の原理
  - $\bar{F}_1 u_1 + \bar{F}_2 u_2 = \bar{R}_1 d_1 + \bar{R}_2 d_2$
    - 仮想力のつり合い：$\bar{F}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_2$， $\bar{F}_2 = \bar{R}_2$
    - 実変形の適合条件：$u_1 = d_1$， $u_2 - u_1 = d_2$

- 力学の問題
  - 実変形に対応する
    実荷重が存在
  - 力と変形を結びつける
    物理法則（フックの法則：バネ係数ｋ）が存在



※今までこれらについては考えていなかった

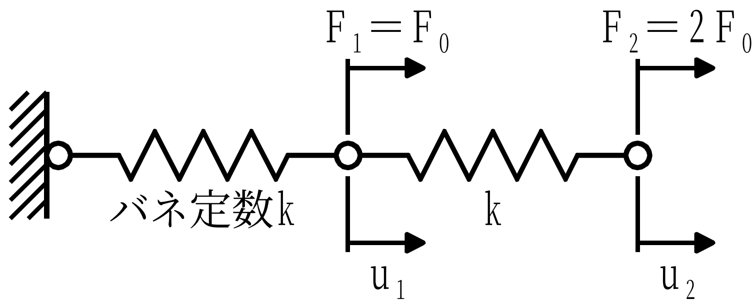
単位荷重の定理

- これまで考えていなかった関係を導入
  - $\bar{F}_1 u_1 + \bar{F}_2 u_2 = \bar{R}_1 d_1 + \bar{R}_2 d_2$

	実際の状態	仮想的な状態
力のつり合い	$F_1 = R_1 - R_2$ $F_2 = R_2$	$\bar{F}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_2$ $\bar{F}_2 = \bar{R}_2$
変形の適合条件	$u_1 = d_1$ $u_2 - u_1 = d_2$	$\bar{u}_1 = \bar{d}_1$ $\bar{u}_2 - \bar{u}_1 = \bar{d}_2$
フックの法則	$R_1 = k d_1$ $R_2 = k d_2$	$\bar{R}_1 = k \bar{d}_1$ $\bar{R}_2 = k \bar{d}_2$

- 実際の状態と仮想的な状態は独立

単位荷重の定理



- 実際の状態
  - 力のつり合い　：$F_1 = R_1 - R_2$，$F_2 = R_2$
  - 変形の適合条件：$u_1 = d_1$，$u_2 - u_1 = d_2$
  - フックの法則　：$R_1 = k\,d_1$，$R_2 = k\,d_2$
  - これらを解けば，u_1，u_2は求まる
    - はり：微分方程式を直接解くことに相当：面倒

- 直接解く代わりに
  - フックの法則より，$d_1 = \dfrac{R_1}{k}$，$d_2 = \dfrac{R_2}{k}$
  - 力のつり合いを解く：$R_1 = 3F_0$，$R_2 = 2F_0$

単位荷重の定理

- 仮想仕事の式：仮想力の原理
  - $\bar{F}_1 u_1 + \bar{F}_2 u_2 = \bar{R}_1 d_1 + \bar{R}_2 d_2$

- 仮想的な状態：任意に選べる
  - 求めたいのは u_1 → その係数のみ１，その他は０
    - $\bar{F}_1 = 1$，$\bar{F}_2 = 0$

  - 力学的な解釈
    - 変位を求めたい点：節点１
    - 求めたい変位方向：u_1 方向
    - 仮想的な単位荷重：$\bar{F}_1 = 1$

単位荷重の定理

- 仮想仕事の式：仮想力の原理
  - $\overline{F}_1 u_1 + \overline{F}_2 u_2 = \overline{R}_1 d_1 + \overline{R}_2 d_2$

- 仮想的な状態：$\overline{F}_1 = 1$，$\overline{F}_2 = 0$
  - 変位を求めたい点
  - 求めたい変位方向
  - 単位荷重

- 単位荷重の定理：$u_1 = \dfrac{R_1 \cdot \overline{R}_1}{k} + \dfrac{R_2 \cdot \overline{R}_2}{k}$

∵フックの法則より，$d_1 = \dfrac{R_1}{k}$，$d_2 = \dfrac{R_2}{k}$

単位荷重の定理

● 単位荷重の定理：$u_1 = \dfrac{R_1 \cdot \bar{R}_1}{k} + \dfrac{R_2 \cdot \bar{R}_2}{k}$

● 仮想的な状態：$\bar{F}_1 = 1$，　$\bar{F}_2 = 0$

- 力のつり合い → $\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 1$

  $\bar{R}_2 = \bar{F}_2 = 0$

● 以上より，　$u_1 = \dfrac{1 \cdot R_1}{k} + \dfrac{0 \cdot R_2}{k} = \dfrac{3F_0}{k}$

∵力のつり合いより，$R_1 = 3F_0$

単位荷重の定理

- 構造物のある点Ａの変位u_Aは，
  ① 実荷重により発生した内部変形d
    - 内部変形d＝内力R／バネ定数k
  ② 点Ａに変位u_A方向の仮想の単位荷重$\bar{F}_A=1$を作用させたときの仮想内力$\bar{R}$
- 積を取り，構造物全体で積分したものに等しい

$$u_A=\sum_{全体}\frac{R\cdot\bar{R}}{k},\quad \text{または}\quad u_A=\int_{全体}\frac{R\cdot\bar{R}}{k}dx$$

- たわみの微分方程式を解く代わりに，はりやトラスの１点の変位量を計算できる

カスティリアノの定理

- つり合い状態にある構造物において，
  - ひずみエネルギーＵを任意点の変位ｖで偏微分
    → その点に作用する，変位方向の集中荷重Ｐ
  - Ｕを任意点の集中荷重Ｐで偏微分
    → その点の，荷重方向の変位ｖ

$$\frac{\partial U}{\partial v} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial P} = v$$

  - 単位荷重の定理と同様，たわみの解法に使える
    - 単位荷重の定理に比べると効率が悪い

エネルギー最小の定理

- 構造物のつり合い状態は，ポテンシャルエネルギーΠを最小とするよう決められる
  - Π＝ひずみエネルギーU
    －外力ポテンシャルＰｖ
  - 結局，カスティリアノの定理と同じ式が導かれる

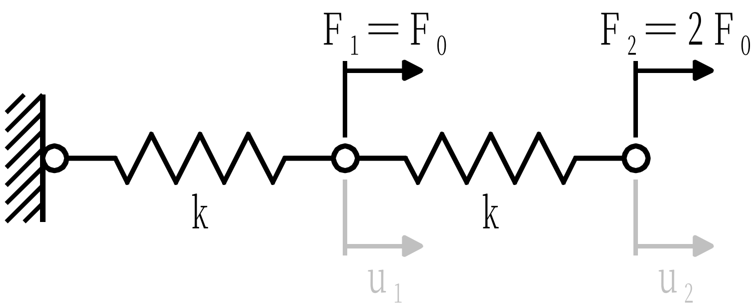
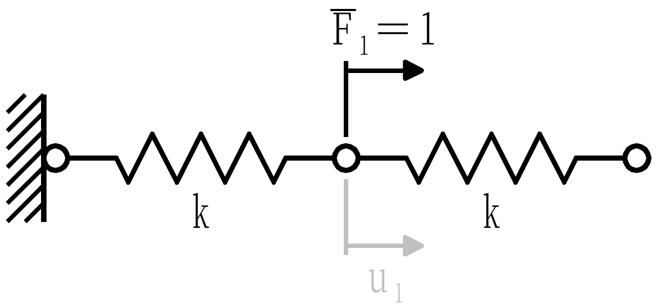
$$\frac{\partial U}{\partial v} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial P} = v$$

  - 不静定構造物の解法：最小仕事の定理
    - 不静定力ＸはひずみエネルギーＵを最小とするよう決められる

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

単位荷重法

- 単位荷重の定理を用いて１点の変位量を求める
  - 以下のような２つの状態を考える

実際の状態	仮想的な状態
実際の荷重	変位を求めたい点に 求めたい変位方向の 仮想的な単位荷重
	
実荷重による内力R	仮想荷重による内力$\overline{R}$

単位荷重法

- 単位荷重法の手順

実際の状態	仮想的な状態
実際の荷重	変位を求めたい点に求めたい変位方向の仮想的な単位荷重
①実荷重による内力 R	②仮想荷重による内力 $\bar{R}$ ※仮想変形 $\bar{d} = \bar{R} / k$

③ 計算 $u = \sum_{全体} \frac{R \cdot \bar{R}}{k}$, または $u = \int_{全体} \frac{R \cdot \bar{R}}{k} dx$

- 内力Rが離散的 → 和，連続 → 積分

単位荷重法

- トラスやはりへの適用
  - 構造形式による内部物理量の違い

	バネ	トラス	はり
内力	復元力Ｒ	部材軸力Ｎ	モーメントＭ
内部変形	バネの伸びｄ	伸びひずみε	曲率φ
弾性係数	バネ定数ｋ	伸び剛性ＥＡ	曲げ剛性ＥＩ
関係式	Ｒ＝ｋｄ	Ｎ＝ＥＡε	Ｍ＝ＥＩφ

単位荷重法

- はりの仮想仕事の式
  - 力：　分布荷重ｑと曲げモーメントM
    - 力のつり合い：$M'' = -q$
    - 集中荷重Ｐ → せん断力$S = M'$がＰずれる
    - 回転荷重Ｑ → 曲げモーメントMがＱずれる
  - 変形：変位ｕと曲率Φ
    - 変形の適合条件：$u'' = -\Phi$

※$M = EI\phi \rightarrow u^{(4)} = q / EI$：たわみの方程式

単位荷重法

- はりの仮想仕事の式の誘導
  - 力のつり合い：$M'' + q = 0$：恒等式
  - 力と独立な変位$\bar{u}$を掛けて，はり全体で積分

$$\int_0^{\ell} (M'' + q)\bar{v}\,dx = 0$$

  - ２回部分積分：変形の適合条件，境界条件を考慮

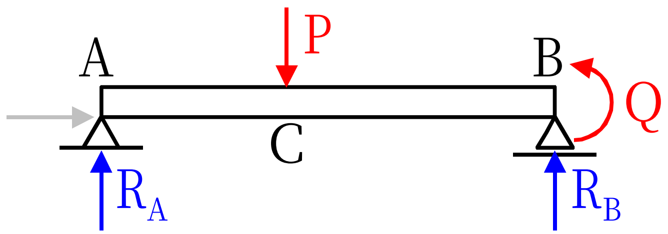
- はりの仮想仕事の式（仮想変位の原理）

$$P\bar{v} + Q\bar{\theta} + \int_0^{\ell} q\bar{v}\,dx = \int_0^{\ell} M\bar{\Phi}\,dx$$

  - 外力による仕事＝内力による仕事

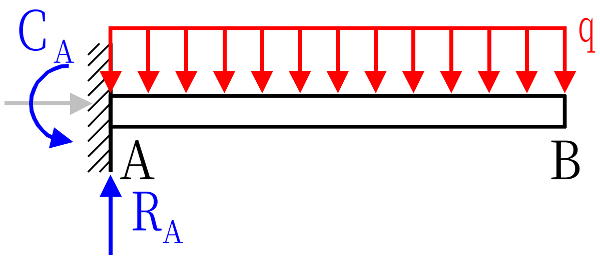
単位荷重法

- 仮想仕事の式：荷重や支持条件により異なる
  - 例1：集中荷重Ｐ，Ｑを受ける単純ばり



$$-R_A\bar{v}_A - R_B\bar{v}_B + P\bar{v}_C - Q\bar{\theta}_B = \int_0^\ell M\bar{\phi}dx$$

  - 例2：分布荷重ｑを受ける片持ちばり



$$-R_A\bar{v}_A - C_A\bar{\theta}_A + \int_0^\ell q\bar{v}dx = \int_0^\ell M\bar{\phi}dx$$

  - 反力も外力扱いできる
  - 符号は変位（ｖ：下向き，θ：時計回り）に準拠

単位荷重法

- はりの仮想仕事の式（仮想力の原理）

$$\bar{P}v+\bar{Q}\theta+\int_0^{\ell}\bar{q}\,v\,dx=\int_0^{\ell}\bar{M}\Phi\,dx$$

- 仮想的な状態：例えば$\bar{P}$＝１，他は０
  - 変位を求めたい点に求めたい変位方向の単位荷重

- 単位荷重の定理：$v=\int_0^{\ell}\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx$

∵モーメント－曲率関係：$M=EI\phi$

単位荷重法

- 単位荷重法の手順（はりの曲げ変形）

実際の状態	仮想的な状態
実際の荷重	変位を求めたい点に求めたい変位方向の仮想的な単位荷重
①実荷重による曲げモーメントM	②仮想荷重による曲げモーメント$\overline{M}$ ※仮想変形$\overline{\phi}=\overline{M}/EI$

③ 計算　$v=\int_0^{\ell}\frac{M\cdot\overline{M}}{EI}dx$

単位荷重法

- 単位荷重法の手順（トラスの伸び変形）

実際の状態	仮想的な状態
実際の荷重	変位を求めたい点に求めたい変位方向の仮想的な単位荷重
①実荷重による全部材の軸力N	②仮想荷重による全部材軸力$\overline{N}$ ※仮想変形$\overline{\varepsilon}=\overline{N}$／ＥＡ

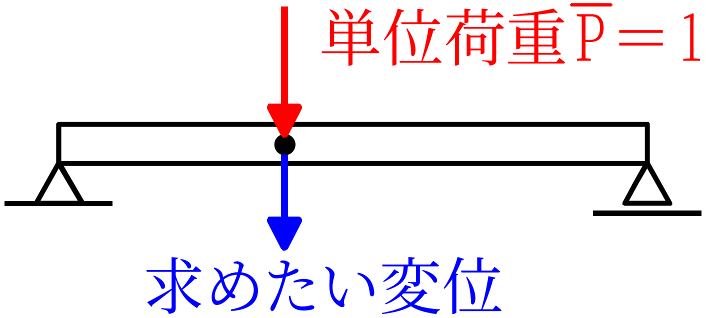
③ 計算　$v=\int_0^{\ell}\frac{N\cdot\overline{N}}{EA}dx=\sum_{全部材}\frac{N\cdot\overline{N}}{EA}\cdot L$

∵ トラス部材の軸力は一定

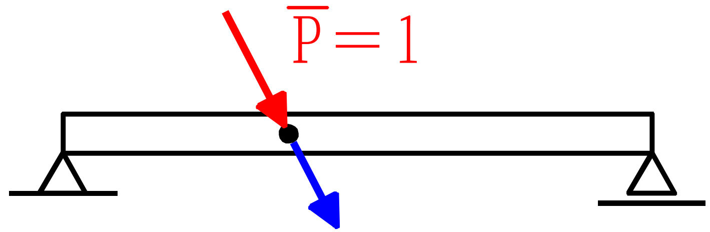
単位荷重法

- 仮想的な状態：求めたい変位によってのみ決まる
  - 変位を求めたい点に求めたい変位方向の単位荷重

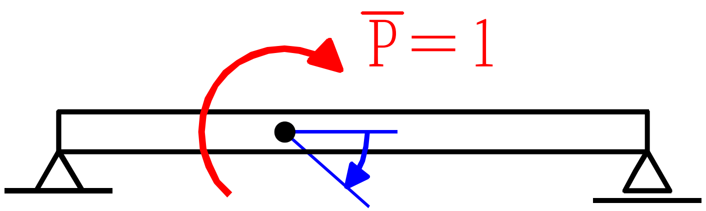
・たわみ



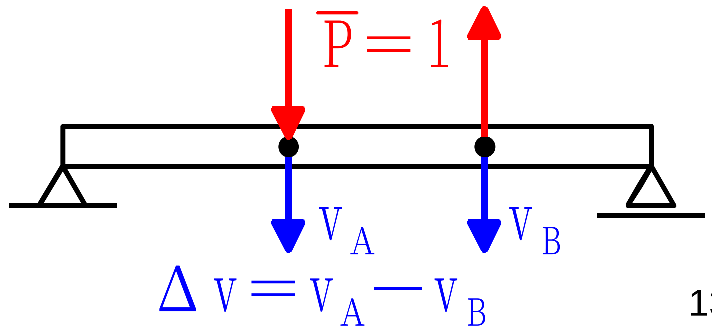
※方向は自由



・たわみ角



・相対変位



単位荷重法

● 単位荷重の定理

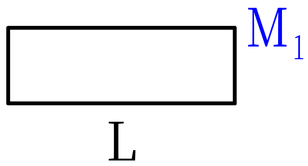
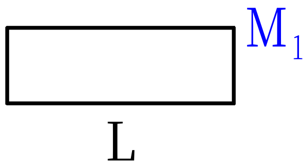
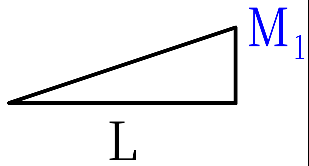
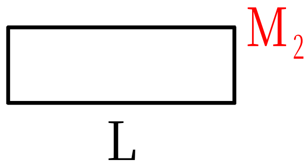
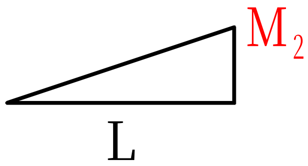
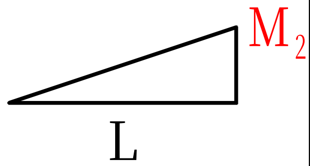
- 一般式： $v = \int_0^\ell \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx + \int_0^\ell \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx + \cdots$
  - ここでは省略するが，せん断変形や温度膨張に関する項もある

- はりの曲げ変形　：Mに関する項のみ考慮
- トラスの伸び変形：Nに関する項のみ考慮
- 曲げと伸びの両方：M，N両方の項を考慮

単位荷重法

- ＥＩ一定のとき，$v=\int_0^{\ell}\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int_0^{\ell}M\cdot\bar{M}\,dx$

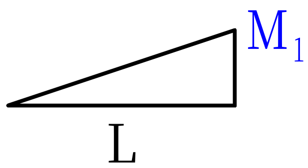
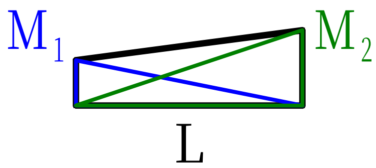
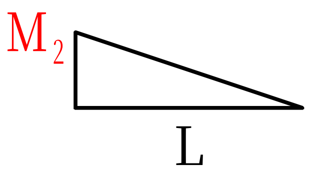
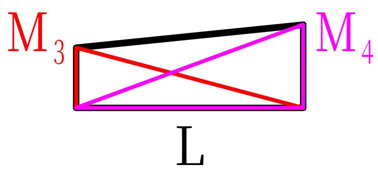
- 積分公式：積分計算の簡略化

M			
$\bar{M}$			
$\int_0^{\ell}M\cdot\bar{M}\,dx$	$M_1\cdot M_2\cdot L$	$\frac{1}{2}M_1\cdot M_2\cdot L$	$\frac{1}{3}M_1\cdot M_2\cdot L$

単位荷重法

- ＥＩ一定のとき，　$v=\int_0^{\ell}\frac{M\cdot\bar{M}}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int_0^{\ell}M\cdot\bar{M}\,dx$

- 積分公式：積分計算の簡略化

M		
$\bar{M}$		
$\int_0^{\ell}M\cdot\bar{M}\,dx$	$\frac{1}{6}M_1\cdot M_2\cdot L$	$\frac{1}{3}M_1\cdot M_3\cdot L+\frac{1}{6}M_1\cdot M_4\cdot L+\frac{1}{6}M_2\cdot M_3\cdot L+\frac{1}{3}M_2\cdot M_4\cdot L$

はりの例題

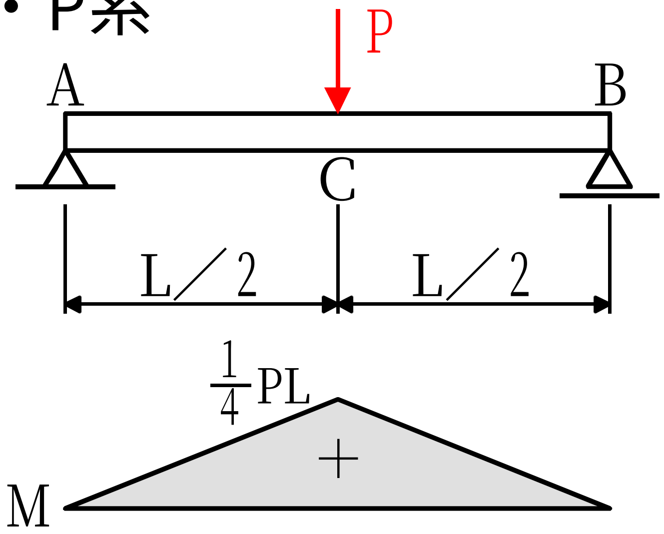
● 点Cのたわみv_Cを求めよ．EI一定．

- 実際の状態：「P系」
  → モーメント分布 M

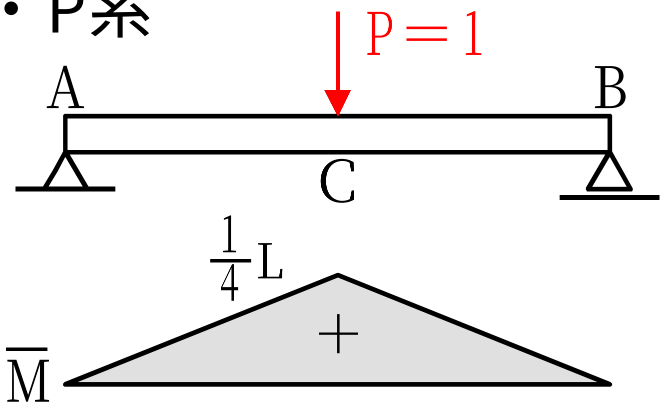
- 仮想の状態：「$\bar{P}$系」
  → モーメント分布 $\bar{M}$

- 計算 $v_C = \int_0^{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx$

・P系

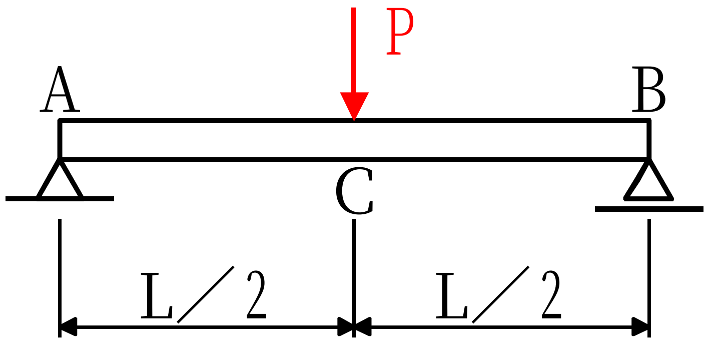


・$\bar{P}$系

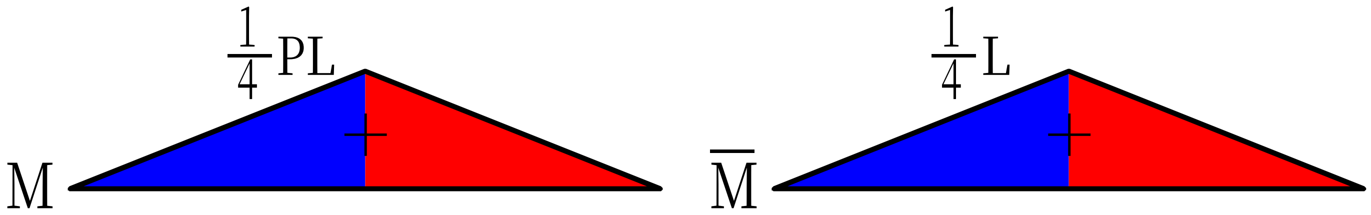


はりの例題

- 計算　$v_C = \int_0^{\ell} \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx$



  - 積分公式を使う

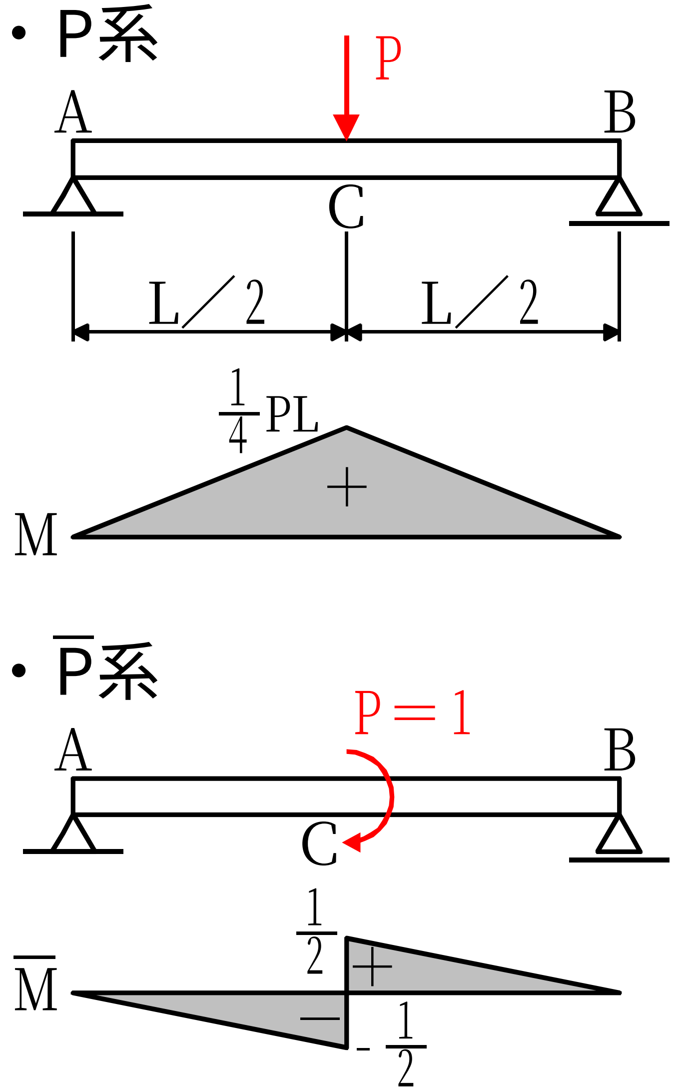


  - $v_C = (1/3)\cdot(1/4)PL\cdot(1/4)L\cdot(L/2)/EI$：AC間
    $+(1/3)\cdot(1/4)PL\cdot(1/4)L\cdot(L/2)/EI$：CB間
    $=(1/48)\cdot(PL^3/EI)$

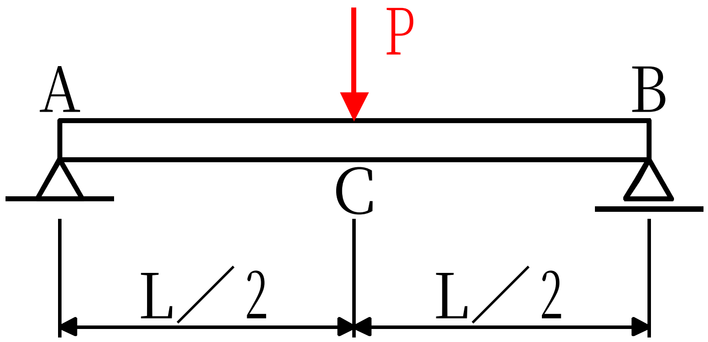
はりの例題

● 点Cのたわみ角θ$_C$を求めよ．EI一定．

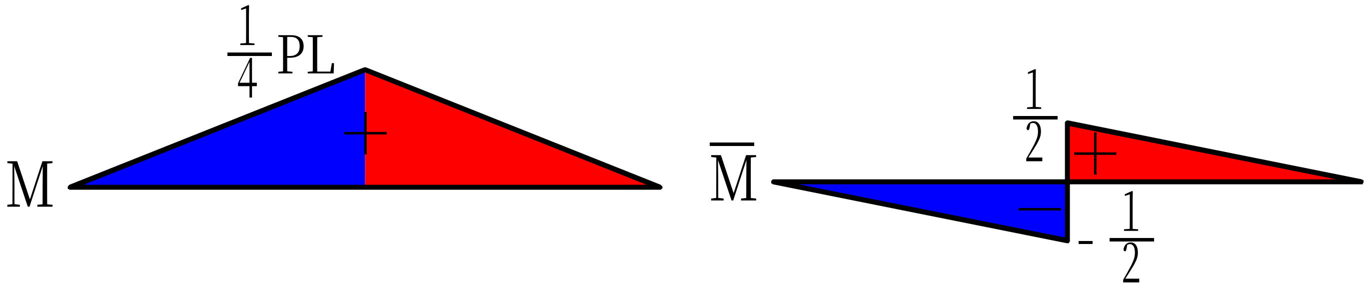
- 実際の状態：「P系」
  → モーメント分布 M
- 仮想の状態：「$\overline{P}$系」
  → モーメント分布 $\overline{M}$
- 計算 $\theta_C = \int_0^{\ell} \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx$



はりの例題



- 計算　$\theta_C = \int_0^\ell \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx$
    - 積分公式を使う

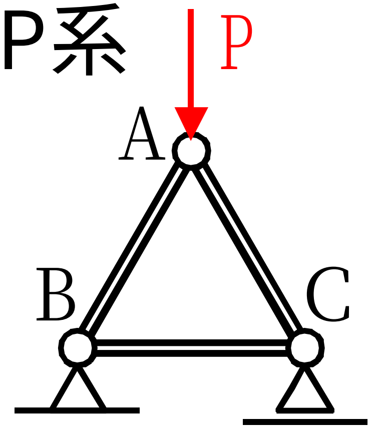


- $\theta_C = (1/3) \cdot (1/4)PL \cdot (-1/2) \cdot (L/2)/EI$：AC間
  $+ (1/3) \cdot (1/4)PL \cdot (1/2)L \cdot (L/2)/EI$：CB間
  $= 0$

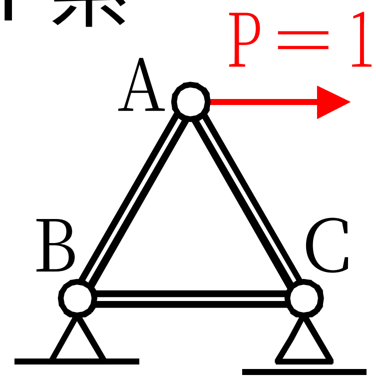
トラスの例題

- トラス：１辺Ｌの正三角形
  点Ａの水平たわみu_A
  を求めよ．ＥＡ一定．
  - 実際の状態：「P系」
    → 全部材の軸力 N
  - 仮想の状態：「$\overline{P}$系」
    → 全部材の軸力 $\overline{N}$
  - 計算 $u_A = \int_0^{\ell} \frac{N \cdot \overline{N}}{EA} dx = \sum \frac{N \cdot \overline{N}}{EA} \cdot L$

- P系



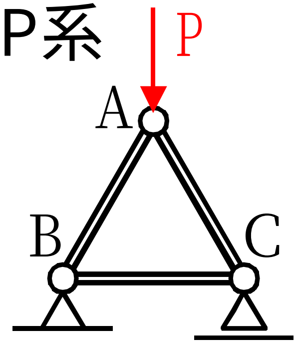
- $\overline{P}$系



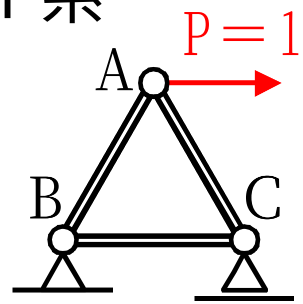
トラスの例題

- 計算 $u_A=\sum\frac{N\cdot\bar{N}}{EA}\cdot L=\frac{1}{EA}\sum N\cdot\bar{N}\cdot L \quad \because EA$一定

• P系



• $\bar{P}$系



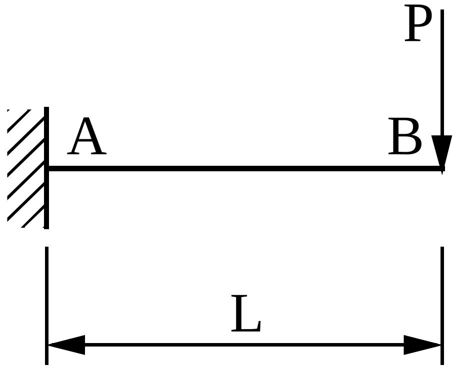
- 表計算を使う

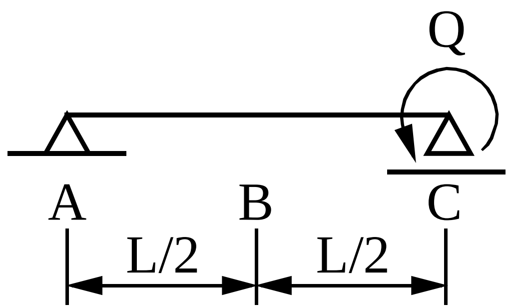
部材	N	$\bar{N}$	L	$N\bar{N}L$
AB	$-\sqrt{3}P/3$	1	L	$-\sqrt{3}PL/3$
AC	$-\sqrt{3}P/3$	-1	L	$\sqrt{3}PL/3$
BC	$\sqrt{3}P/6$	1/2	L	$\sqrt{3}PL/12$
			Σ	$\sqrt{3}PL/12$

- $u_A=(\sqrt{3}/12)\cdot(PL/EA)$

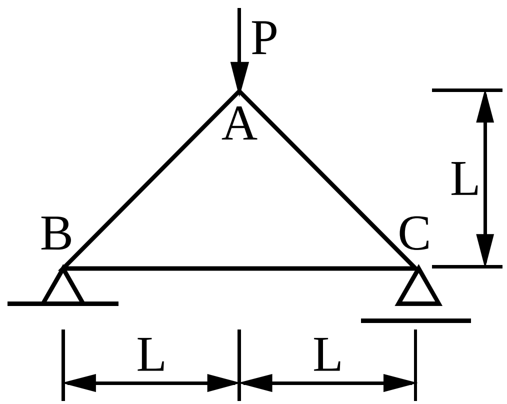
練習問題

- 点Bのたわみ，たわみ角を求めよ．ＥＩは一定．





- 点Aの鉛直たわみ，
水平たわみを求めよ．
ＥＡは一定．



不静定構造物の解法

- 不静定構造物
  - 力のつり合いで支点反力，部材力を確定できない
  - 基本：４階のたわみの微分方程式を解く

$$\frac{d^4 v}{d x^4} = \frac{q}{EI}$$

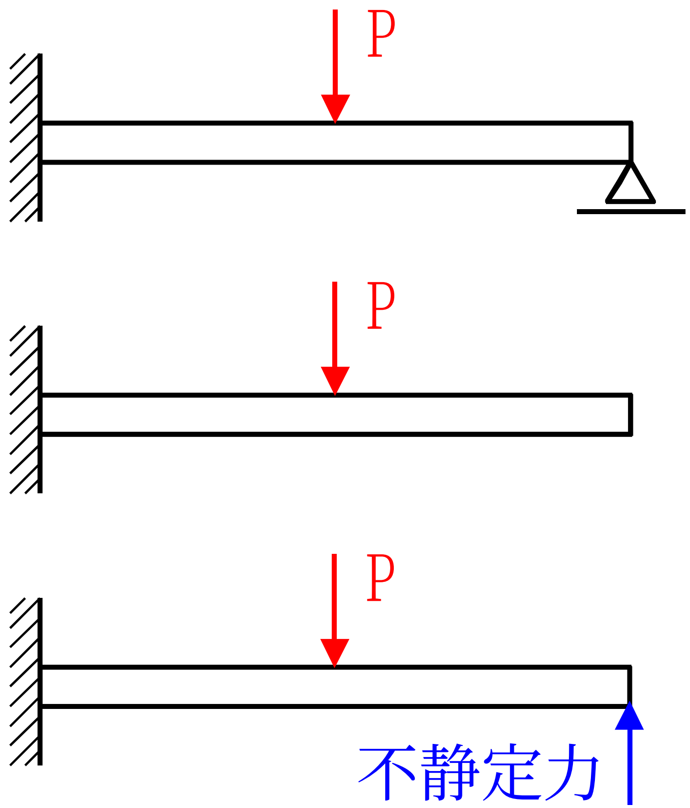
- 構造解析手法
  - 応力法：力を未知として式を立てる
    - 例：単位荷重法，最小仕事の定理など
    - 手計算向き：この授業で扱う
  - 変位法：変位を未知として式を立てる
    - マトリクス法：コンピュータ向き

不静定構造物の解法

- 単位荷重法による解法
  - 力のつり合い式を立てても解くことができない
  - 不静定構造

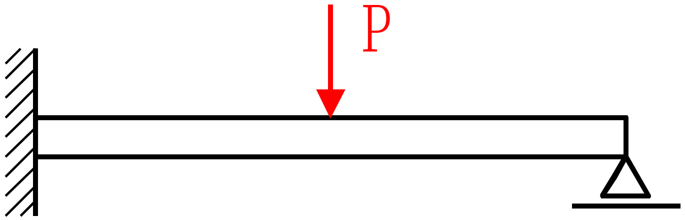
    ↓ 変位拘束を除去
  - 静定基本構造

    ↓
  - 変位拘束を補うために「不静定力」を導入
    - 元の不静定構造と等価

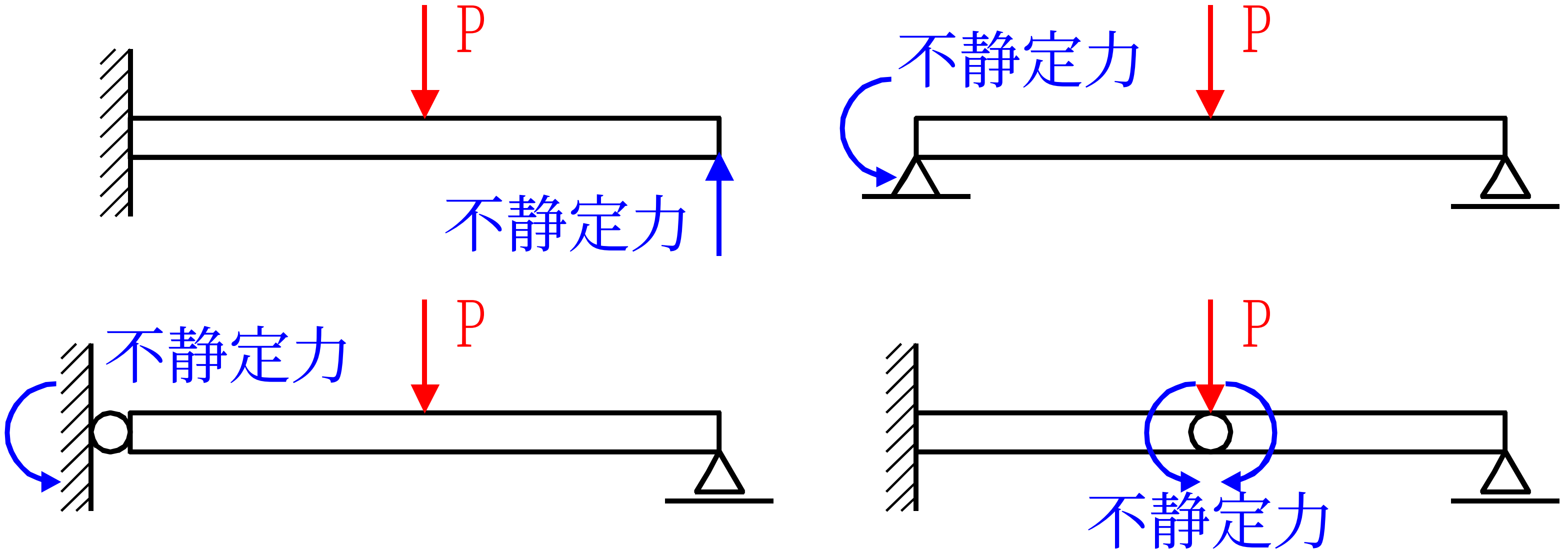


不静定構造物の解法

- 静定基本構造は任意に選べる
  - 不静定構造

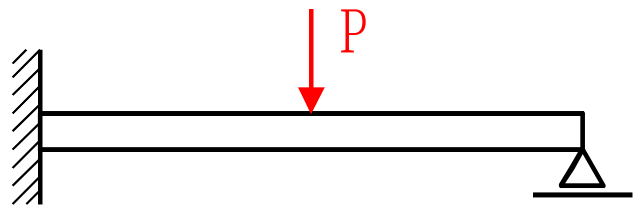


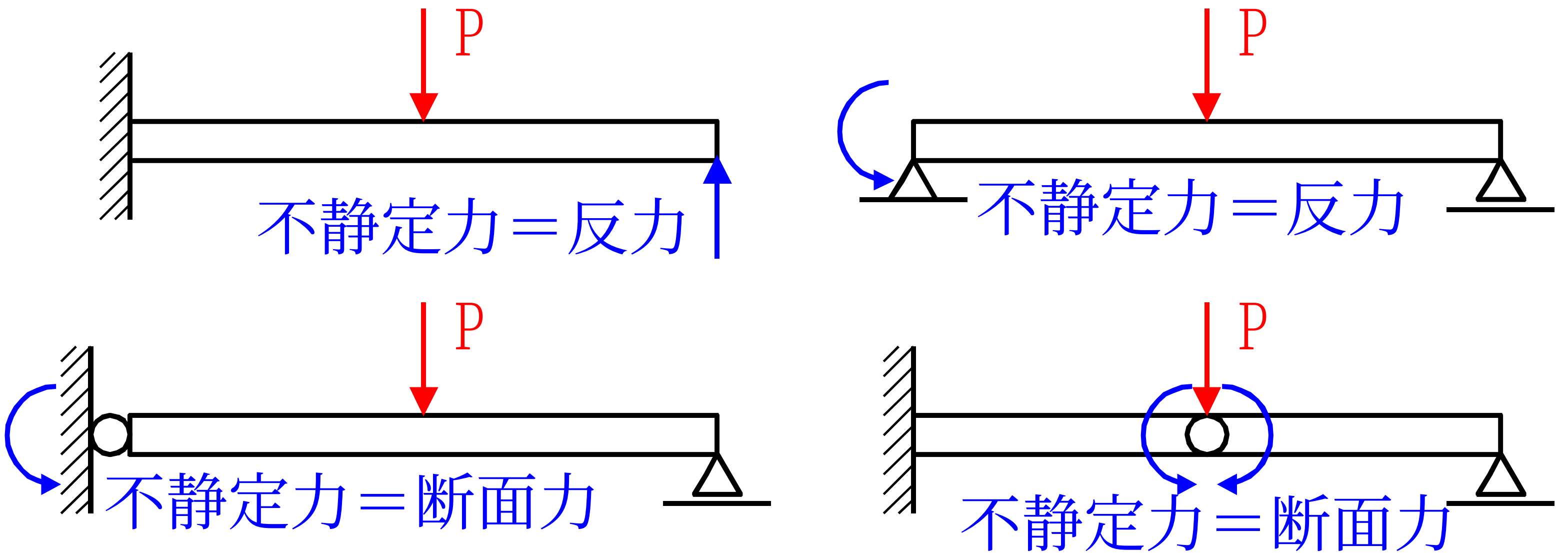
  - 静定基本構造の例



不静定構造物の解法

- 不静定力
  - 元の構造の反力，断面力

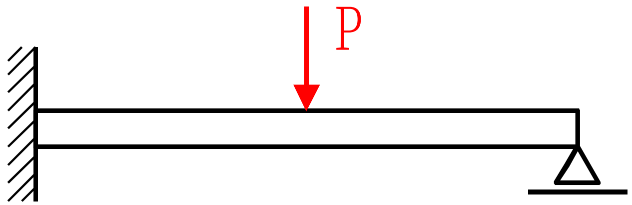


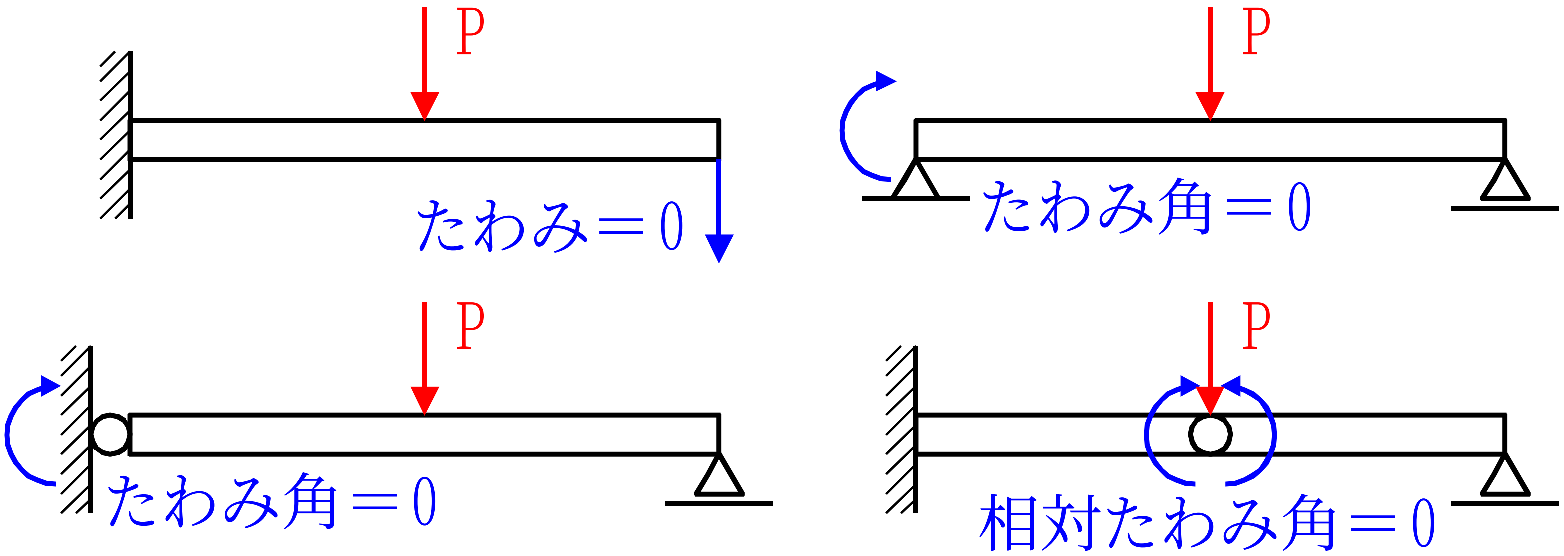


- 不静定力は未知：変形の適合条件により求める

不静定構造物の解法

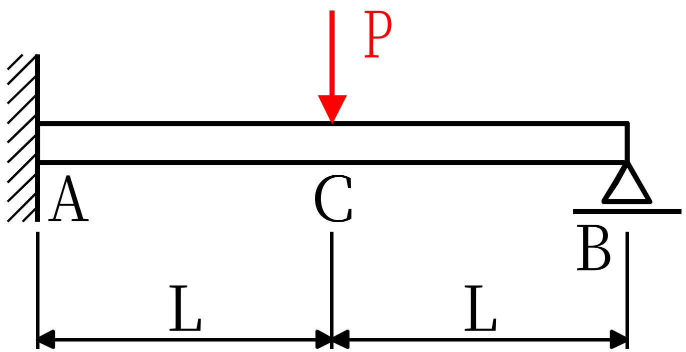
- 不静定力：未知
  - 変形の適合条件より求める
    - 静定化の際除去した，変位拘束の条件



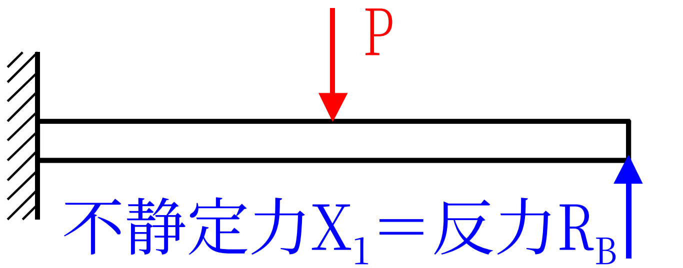


不静定構造物の解法

- 計算の手順
  - 例題
    - 点Cのたわみ



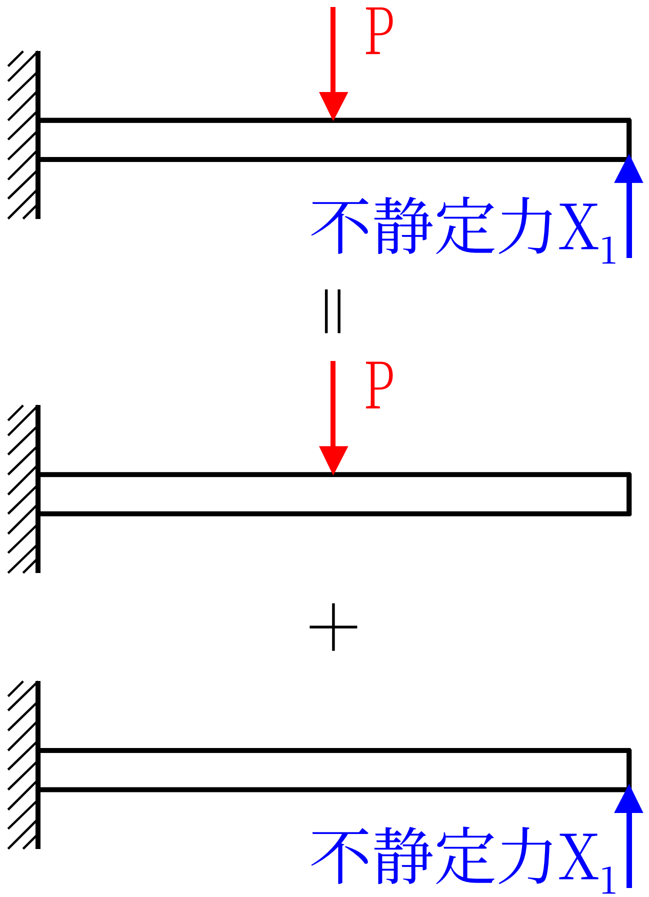
  - 静定基本構造



  - 未知量：$X_1 = R_B$
    - 変形の適合条件$v_B = 0$　∵点Bは支点

不静定ばりの例題

- 外力P，不静定力X_1による点Bのたわみ

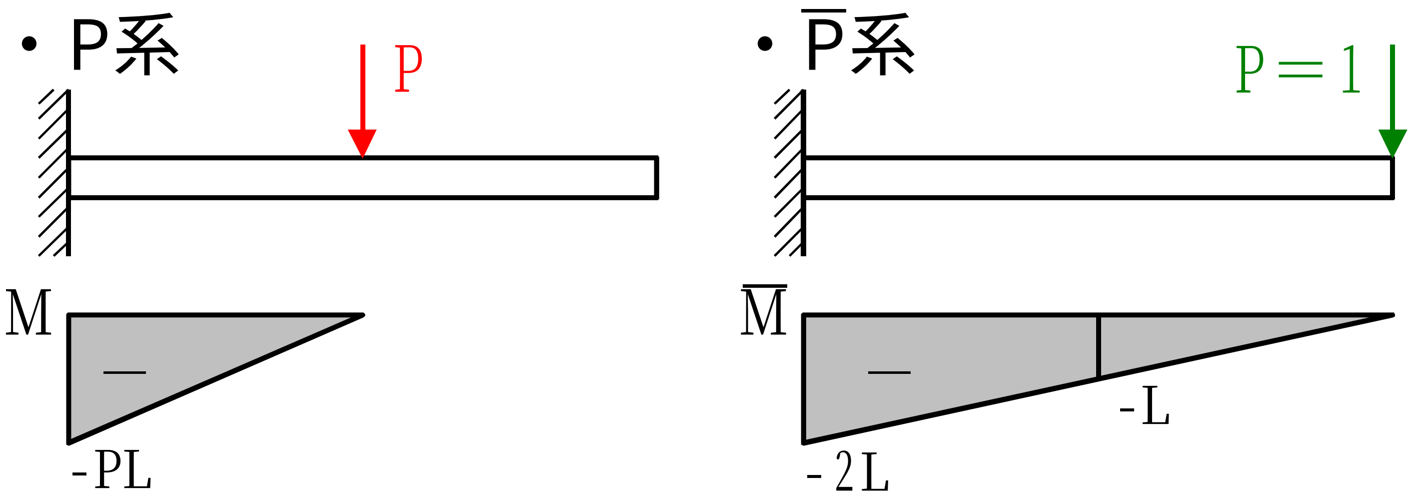


1．Pによるたわみδ_{10}
   - 単位荷重法で求める
2．$X_1=1$によるたわみδ_{11}
   - 単位荷重法で求める
3．合計：$v_B=\delta_{10}+X_1\delta_{11}=0$
   - X_1についての1次式 → X_1

不静定ばりの例題

- 外力P，不静定力X_1による点Bのたわみ

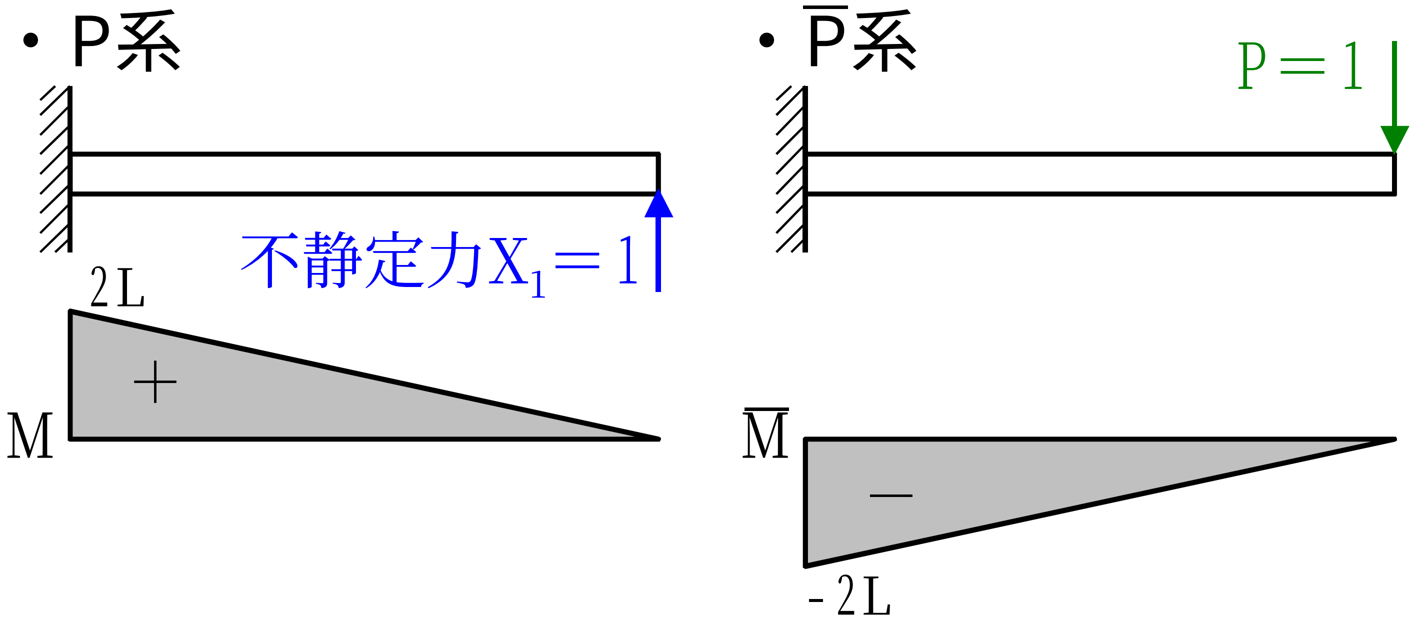
1．Pによるたわみδ_{10}：単位荷重法で求める



- $\delta_{10}=(5／6)\cdot(PL^3／EI)$

不静定ばりの例題

- 外力P，不静定力X_1による点Bのたわみ
  2．$X_1 = 1$によるたわみδ_{11}：単位荷重法



- $\delta_{11} = (-8/3) \cdot (L^3/EI)$

不静定ばりの例題

- 外力P，不静定力X_1による点Bのたわみ

  1．Pによるたわみ
     - $\delta_{10} = (5/6) \cdot (PL^3/EI)$

  2．$X_1 = 1$によるたわみδ_{11}
     - $\delta_{11} = (-8/3) \cdot (L^3/EI)$

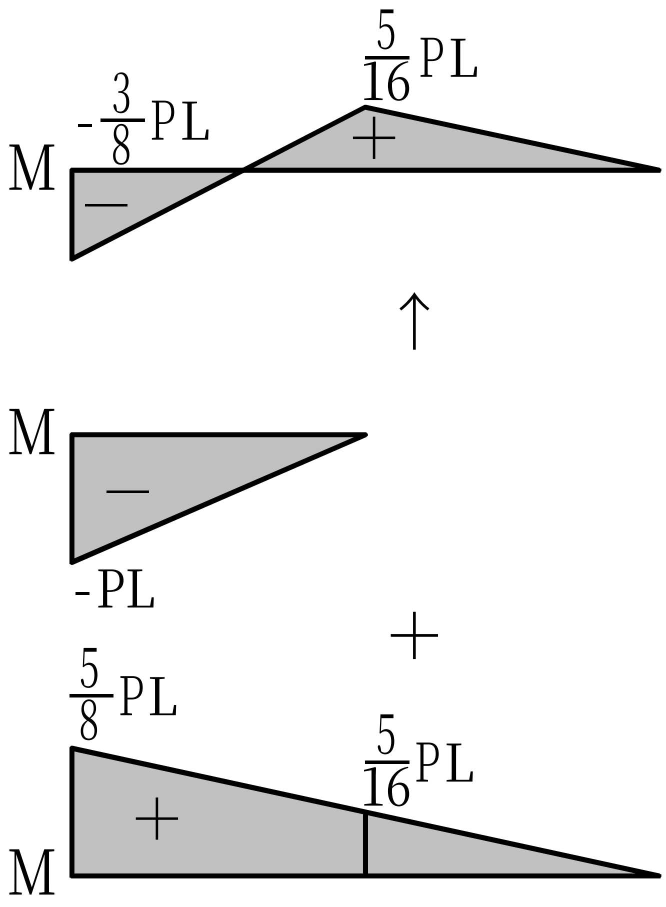
  3．合計：$v_B = \delta_{10} + X_1 \delta_{11}$

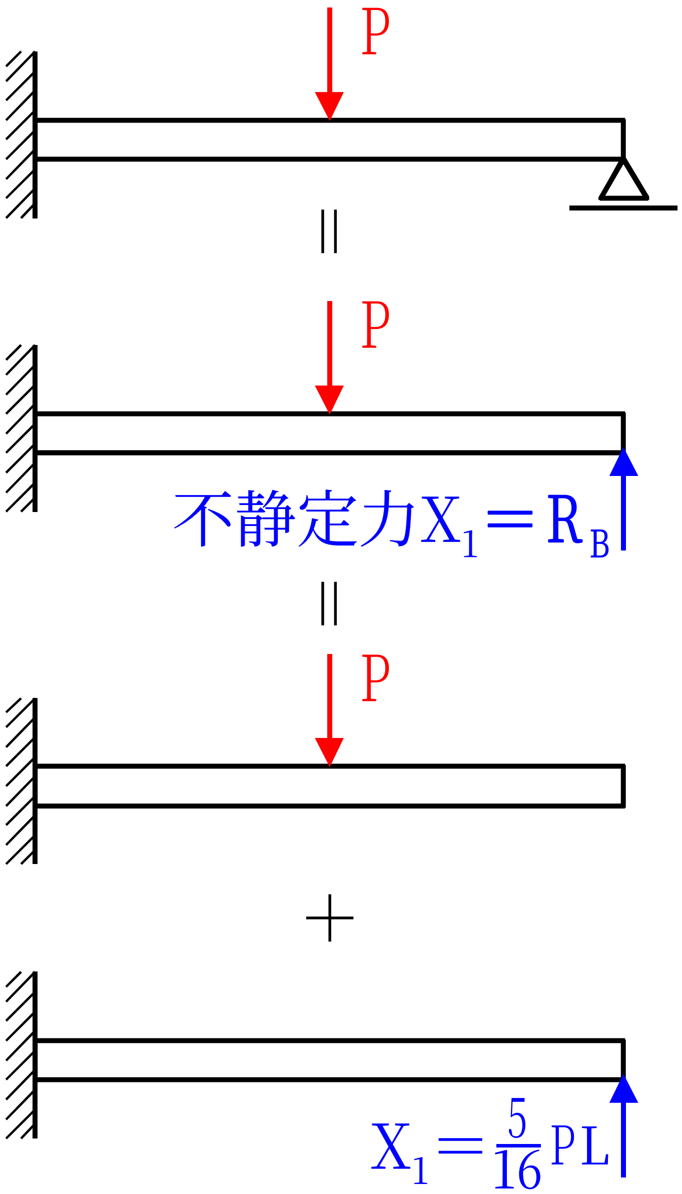
$$= (5/6) \cdot (PL^3/EI) - (8/3) \cdot (L^3/EI) \cdot X_1 = 0$$

- X_1についての1次式 → $X_1 = (5/16)P$

不静定ばりの例題

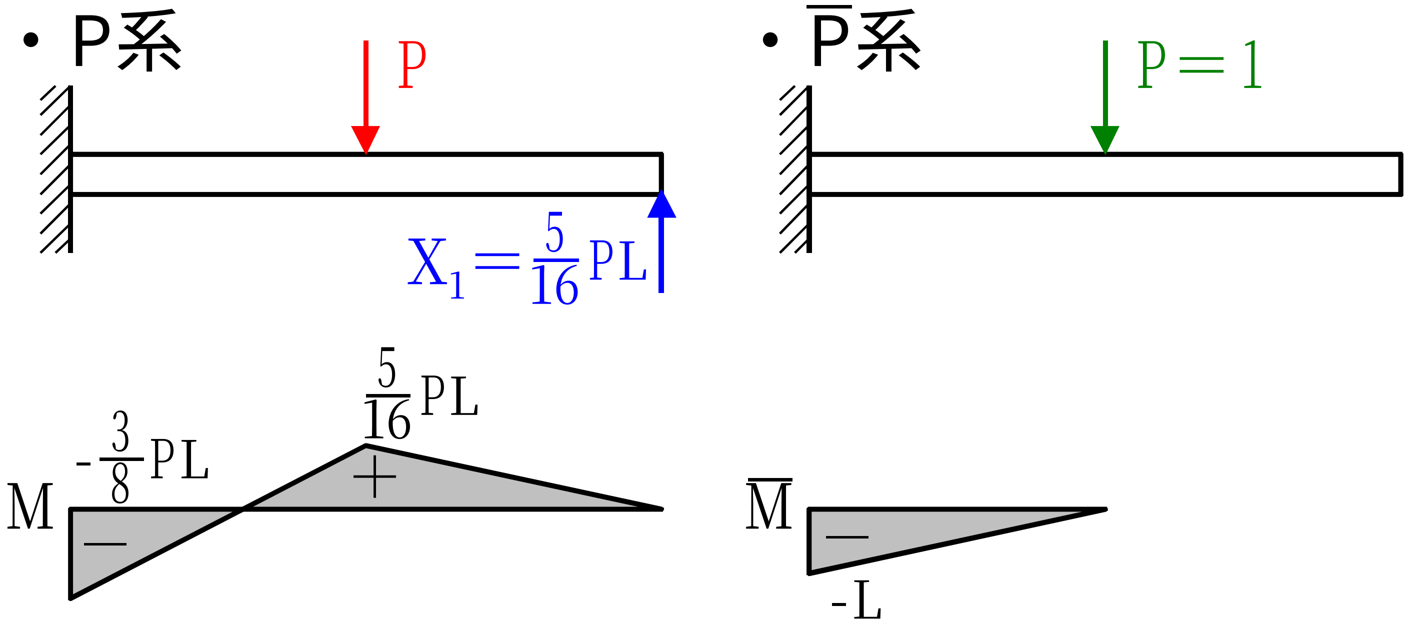
- 元の不静定構造と等価な静定基本構造が確定





不静定ばりの例題

- 点Cのたわみを求める



- $v_C = (7/96) \cdot (PL^3/EI)$

不静定構造物の解法

- まとめ
  - 不静定構造

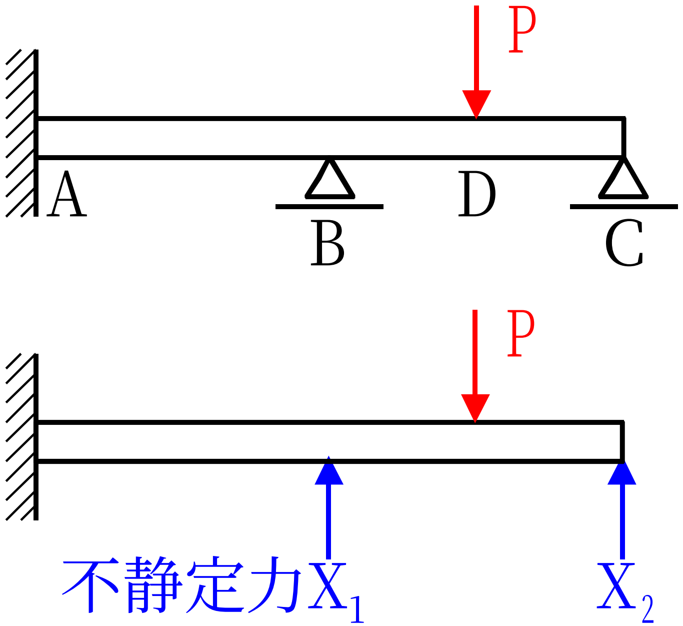
    ↓ 変位拘束を除去
  - 静定基本構造
    - 変位拘束を補うために「不静定力」を導入
    - 元の不静定構造と等価

    ↓
  - 不静定力：変形の適合条件より求める

※計算はすべて静定基本構造で行う

不静定構造物の解法

- ２次以上の不静定の場合
  - ２次の例
  - 静定基本構造の例
    - 不静定力X_1，X_2
    - 変位の適合条件
      - 点B：$v_B=\delta_{10}+X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}=0$
      - 点C：$v_C=\delta_{20}+X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}=0$
      - X_1，X_2についての連立方程式



- 未知の不静定力増えるが，基本は１次と同じ

練習問題

- 図１に示す不静定ばりについて，以下の問いに答えよ．ただし，EIは一定．
  - 図２の静定基本構造を考える．

① 点Cの相対たわみ角の適合条件より不静定力（点CのM）を求めよ．

② 図１のM分布を求めよ．

③ 点Bのたわみ角を求めよ．

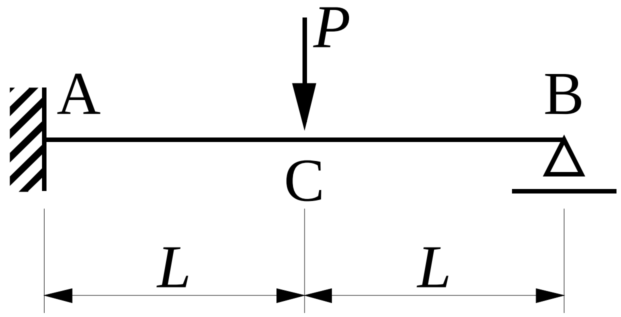


図1

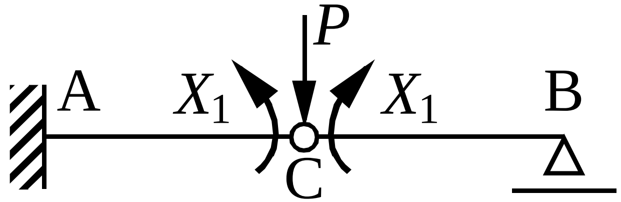


図2

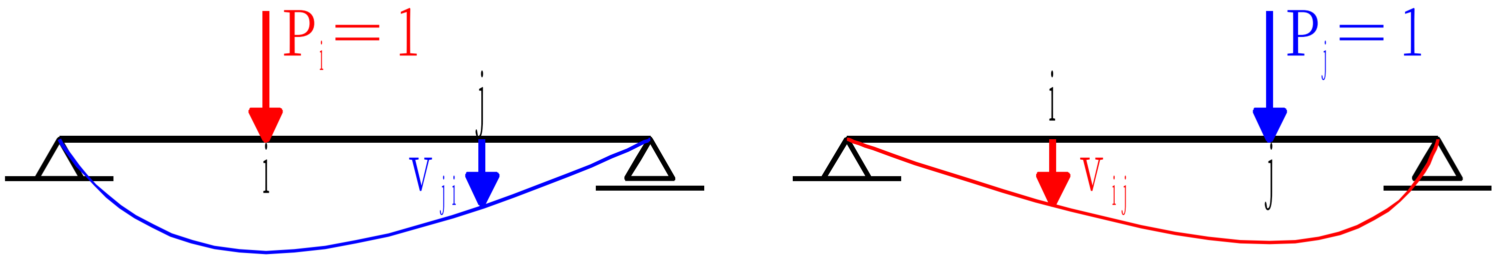
相反作用の定理と影響線

- 相反作用の定理（相反定理）
  - ２点の力と変位の関係を表すもの
  - 仮想仕事の原理（単位荷重の定理）から導かれる
  - バリエーション
    - マックスウェルの相反定理
    - ベッティの相反定理
    - ミューラー・ブレスロウの定理

  - 影響線の計算に応用
    - 不静定構造にも使える

マックスウェルの相反定理

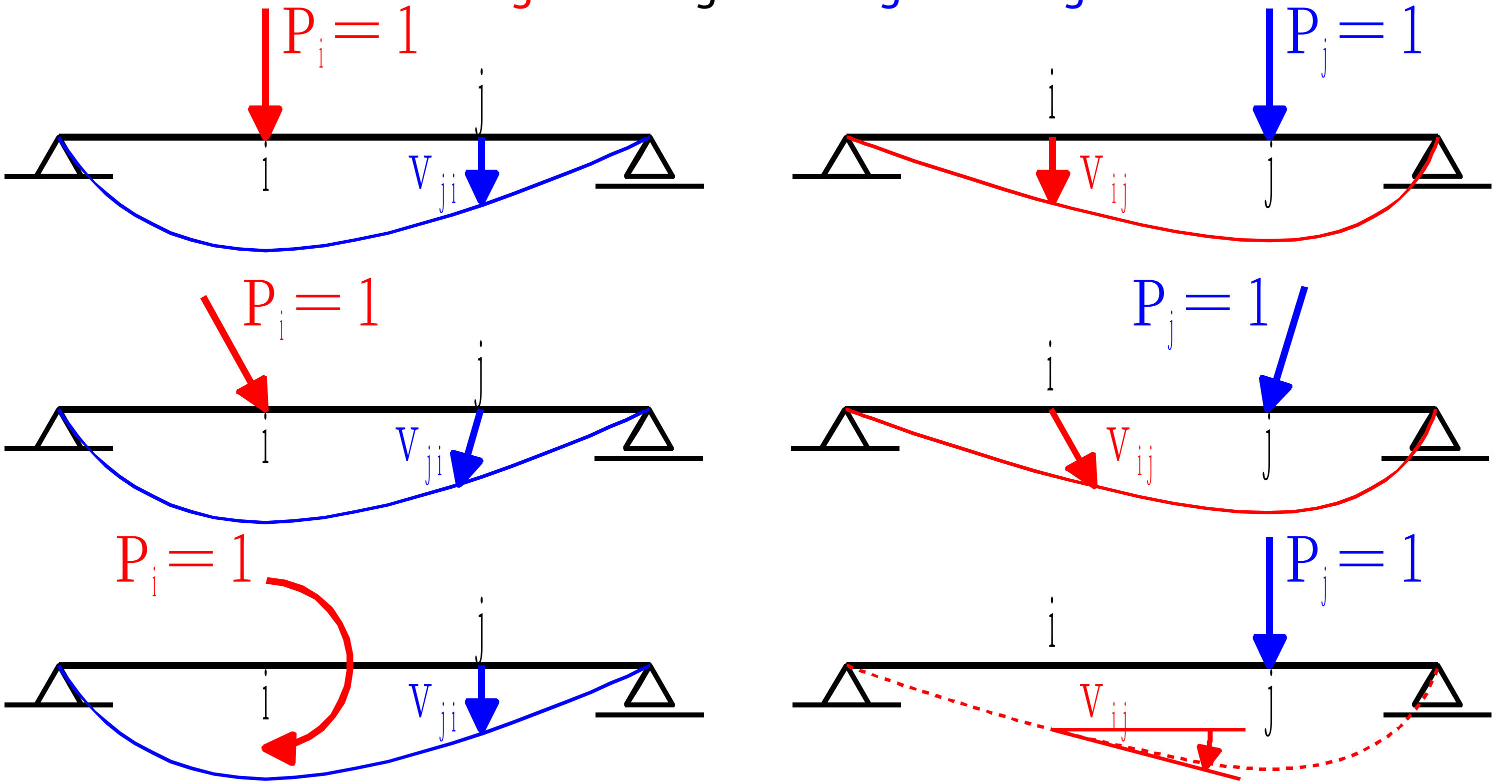
- 弾性体の２点の力と変位の関係（不静定も可）
  - 同じ構造物上の２点ｉ，ｊ



- 点ｉに単位荷重$P_i=1$を作用させたときの点ｊのP_jに対応する（P_j方向の）変位v_{ji}
- 点ｊに単位荷重$P_j=1$を作用させたときの点ｉのP_iに対応する（P_i方向の）変位v_{ij}
- 両者は等しい：$v_{ij}=v_{ji}$

マックスウェルの相反定理

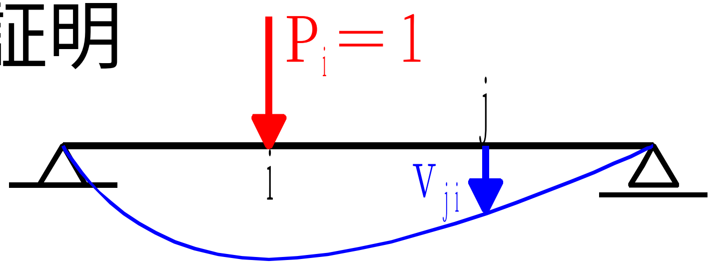
- ２点の力と変位：それぞれ同じ向き
  - 点 $_i$ ：P_i と v_{ij}, 点 $_j$ ：P_j と v_{ji}

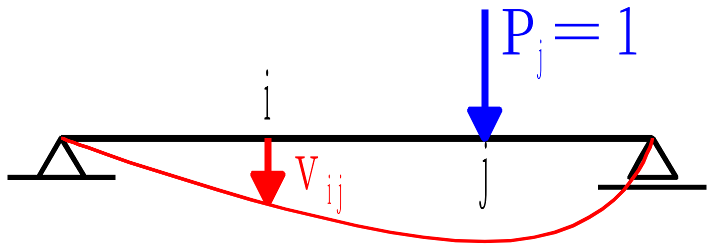


  - いずれも，v_{ij} ＝ v_{ji} は成立

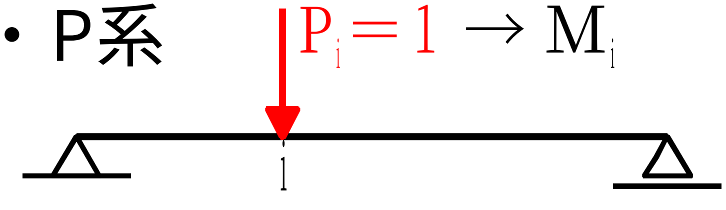
マックスウェルの相反定理

● 証明

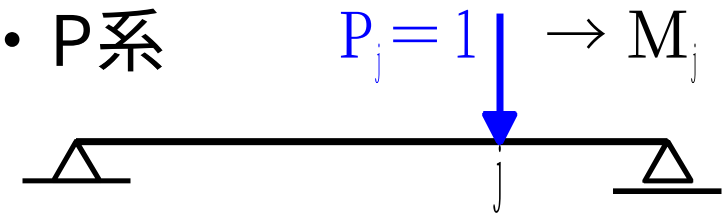




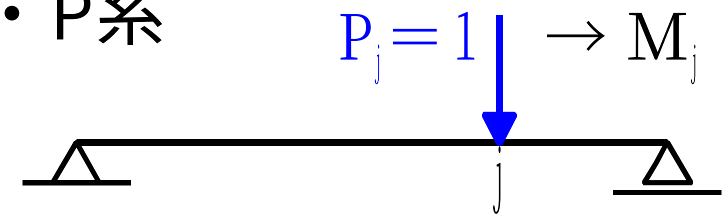
・P系



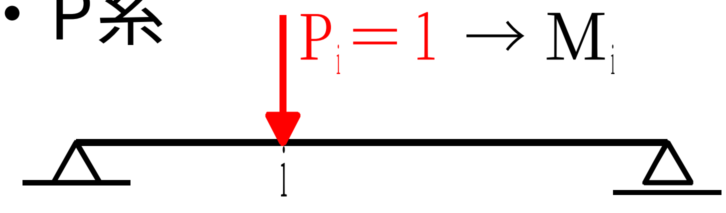
・P系



・$\overline{\text{P}}$系



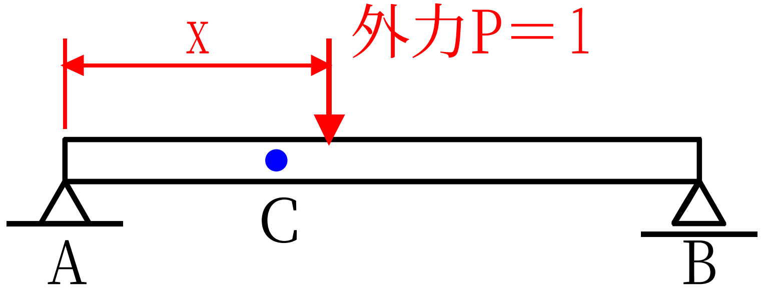
・$\overline{\text{P}}$系



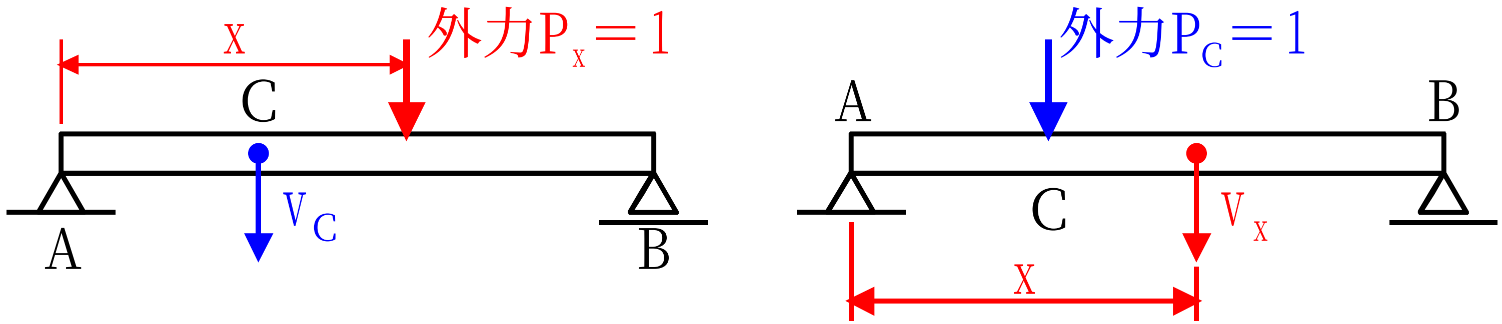
● よって，$v_{ji} = \int_0^{\ell} \frac{M_i \cdot M_j}{EI} dx = \int_0^{\ell} \frac{M_j \cdot M_i}{EI} dx = v_{ij}$

たわみの影響線

- 例題：点Cのたわみ



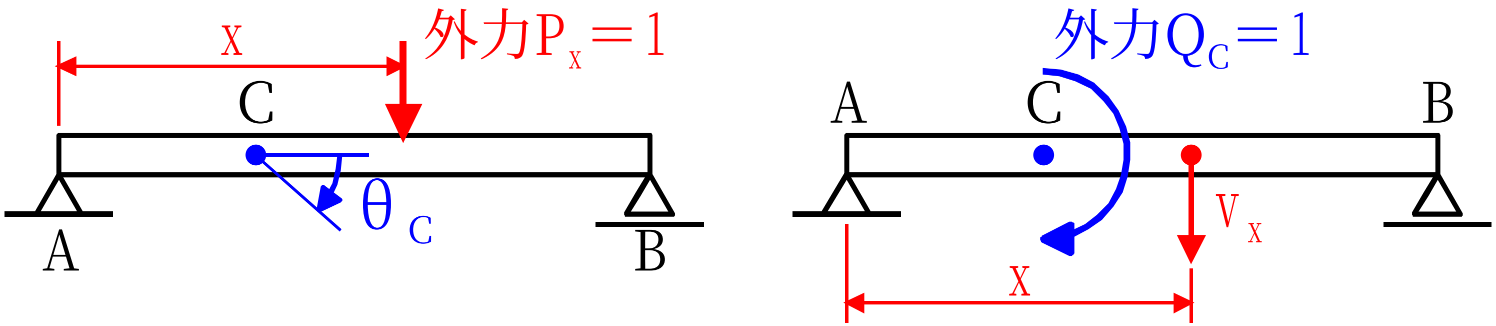
- マックスウェルの相反定理を使う



- 相反定理より，$v_C = v_x$
- 点Cのたわみの影響線 ＝ 点Cに単位荷重を作用させたときのたわみ曲線

たわみの影響線

- たわみ角の影響線も同様に得られる



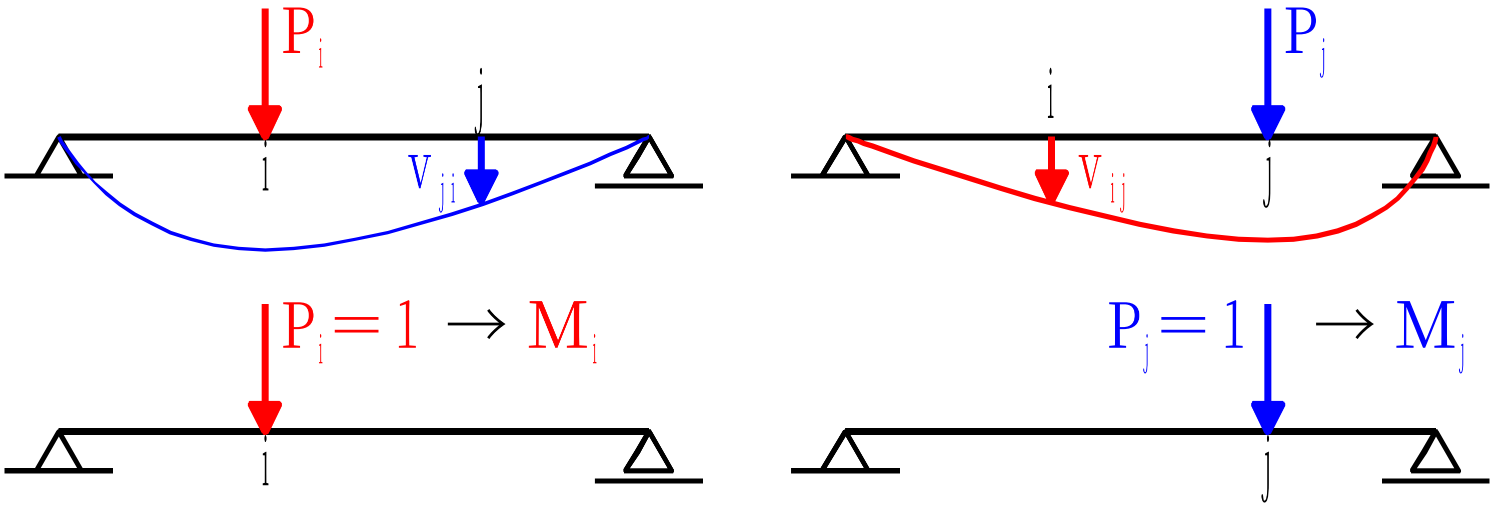
- 点Cのたわみ角の影響線 ＝ 点Cに単位回転荷重を作用させたときのたわみ曲線

×点Cに単位荷重を作用 → たわみ角曲線

※各点（C，x）で，力と変位は同じ向き

ベッティの相反定理

● 単位荷重でない場合

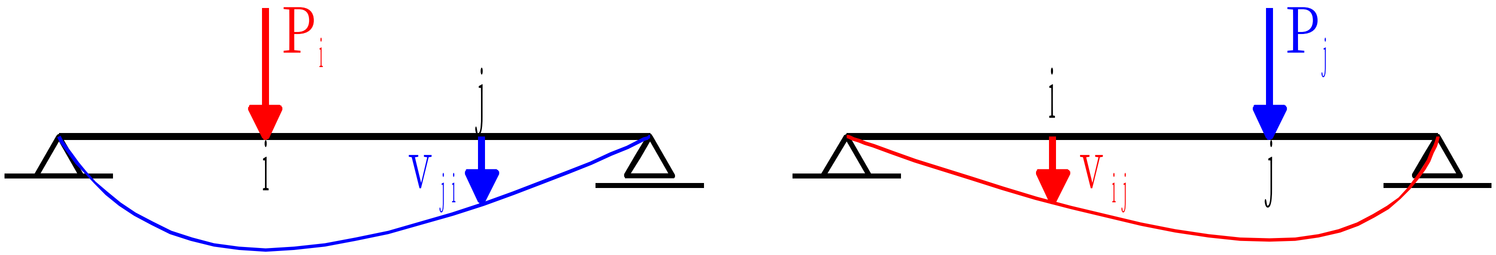


- $v_{ji}=\int_0^{\ell}\frac{P_iM_i\cdot M_j}{EI}dx=P_i\int_0^{\ell}\frac{M_i\cdot M_j}{EI}dx$
- $v_{ij}=\int_0^{\ell}\frac{P_jM_j\cdot M_i}{EI}dx=P_j\int_0^{\ell}\frac{M_j\cdot M_i}{EI}dx$

等しい

ベッティの相反定理

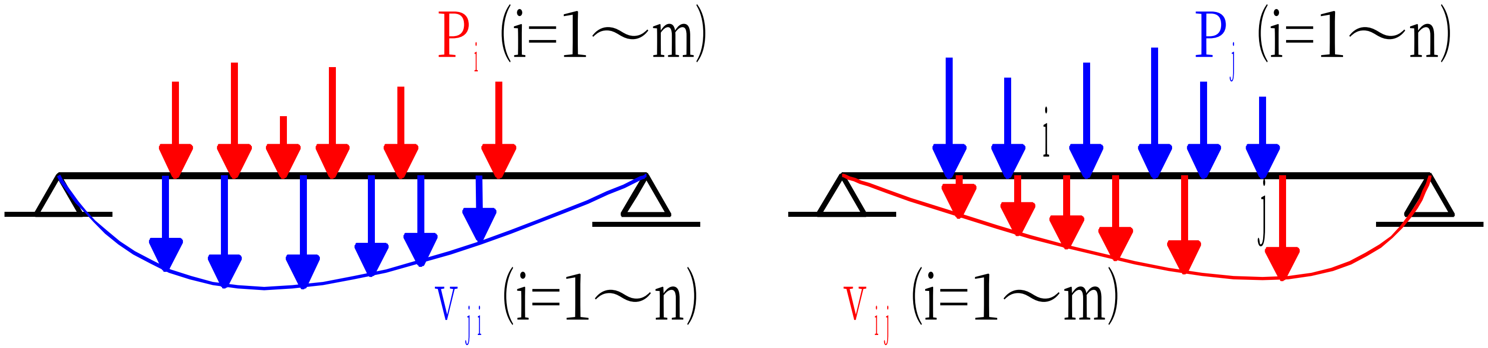
● 単位荷重でない場合



- 点ｉに荷重P_iを作用させたときの点ｊのP_jに対応する（P_j方向の）変位v_{ji}
- 点ｊに荷重P_jを作用させたときの点ｉのP_iに対応する（P_i方向の）変位v_{ij}
- 次の関係が成立： $\underbrace{P_i v_{ij}}_{\text{ｉ点の仕事}} = \underbrace{P_j v_{ji}}_{\text{ｊ点の仕事}}$

ベッティの相反定理の拡張

- 外力が複数の場合

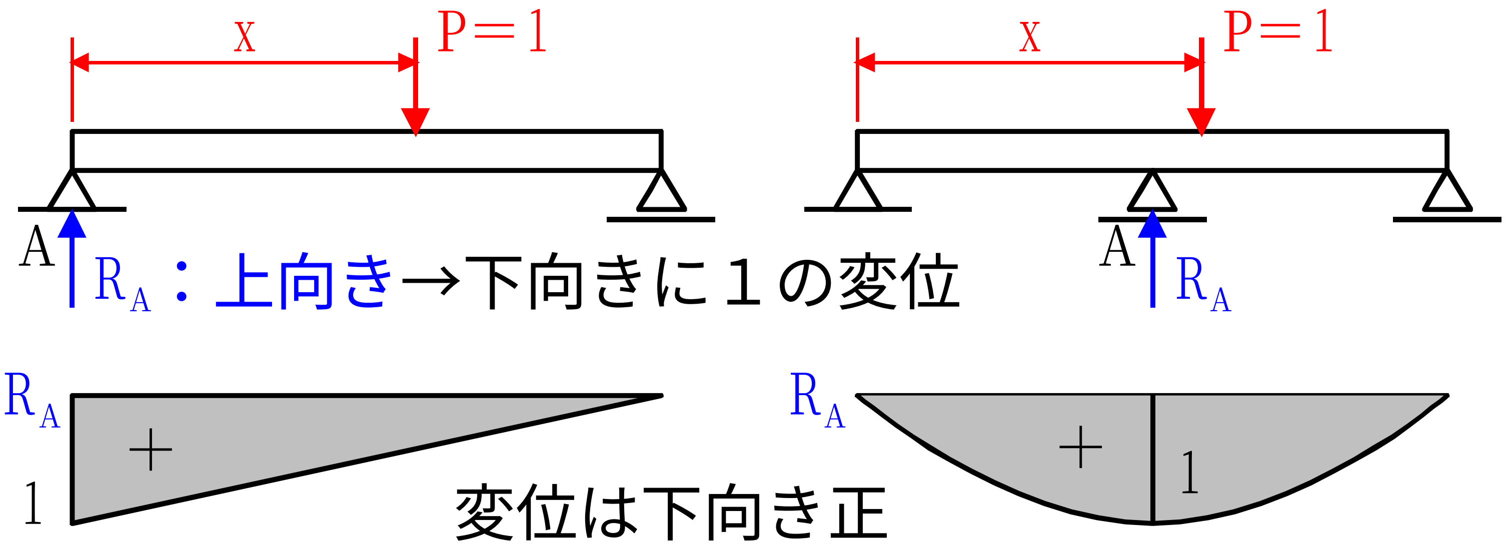


- $\Sigma_{i=1,m} P_i v_{ij} = \Sigma_{j=1,n} P_j v_{ji}$ が成立
  - m個のｉ点の力と変位がなす仕事の合計
    ＝ｎ個のｊ点の力と変位がなす仕事の合計
  - これも単位荷重法により証明できる

ミューラー・ブレスロウの定理

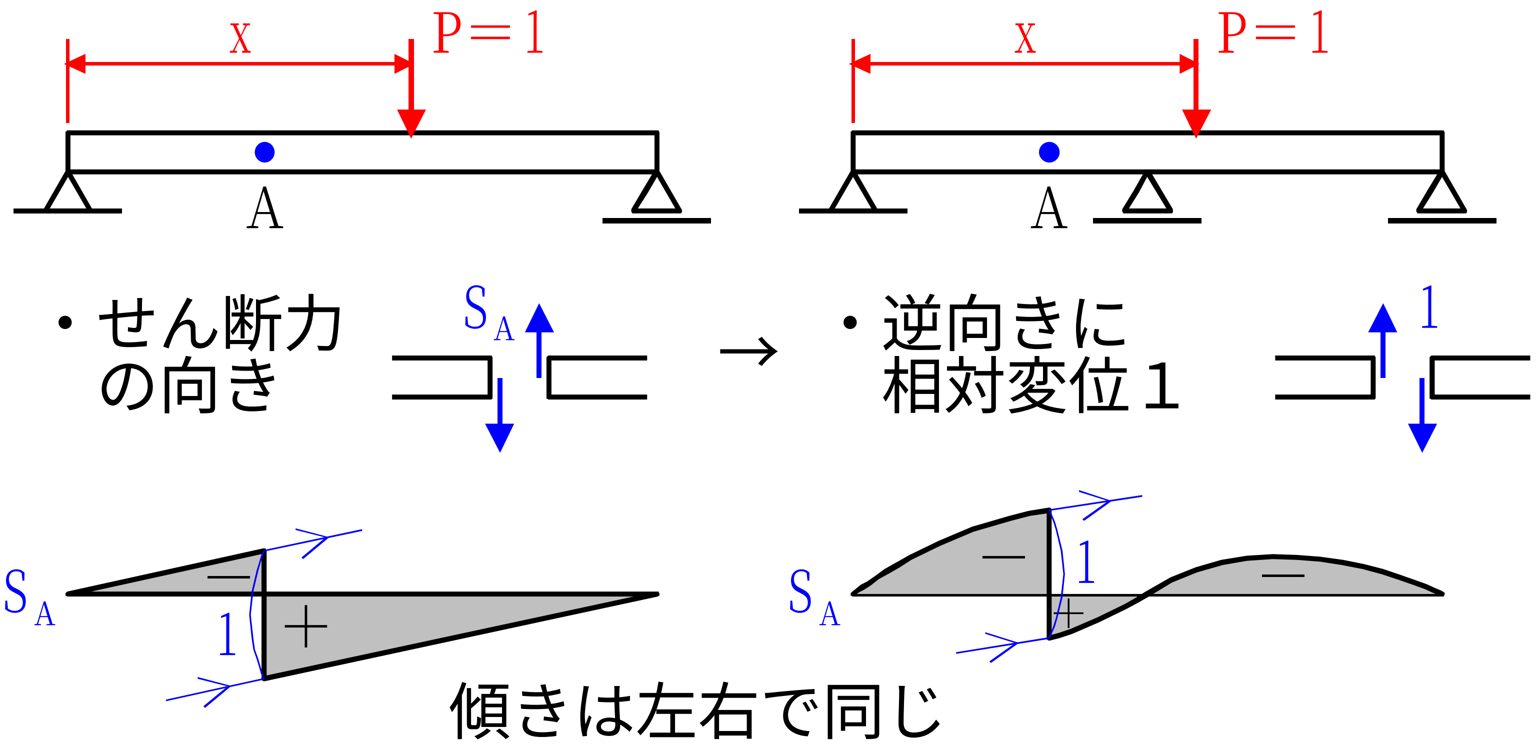
- 構造物の１点Ａに働く断面力（反力）Ｑの影響線は，点ＡにおいてＱに対応する大きさ１の負の変位を与えたときの，変位曲線によって与えられる

- 例：はりの反力の影響線



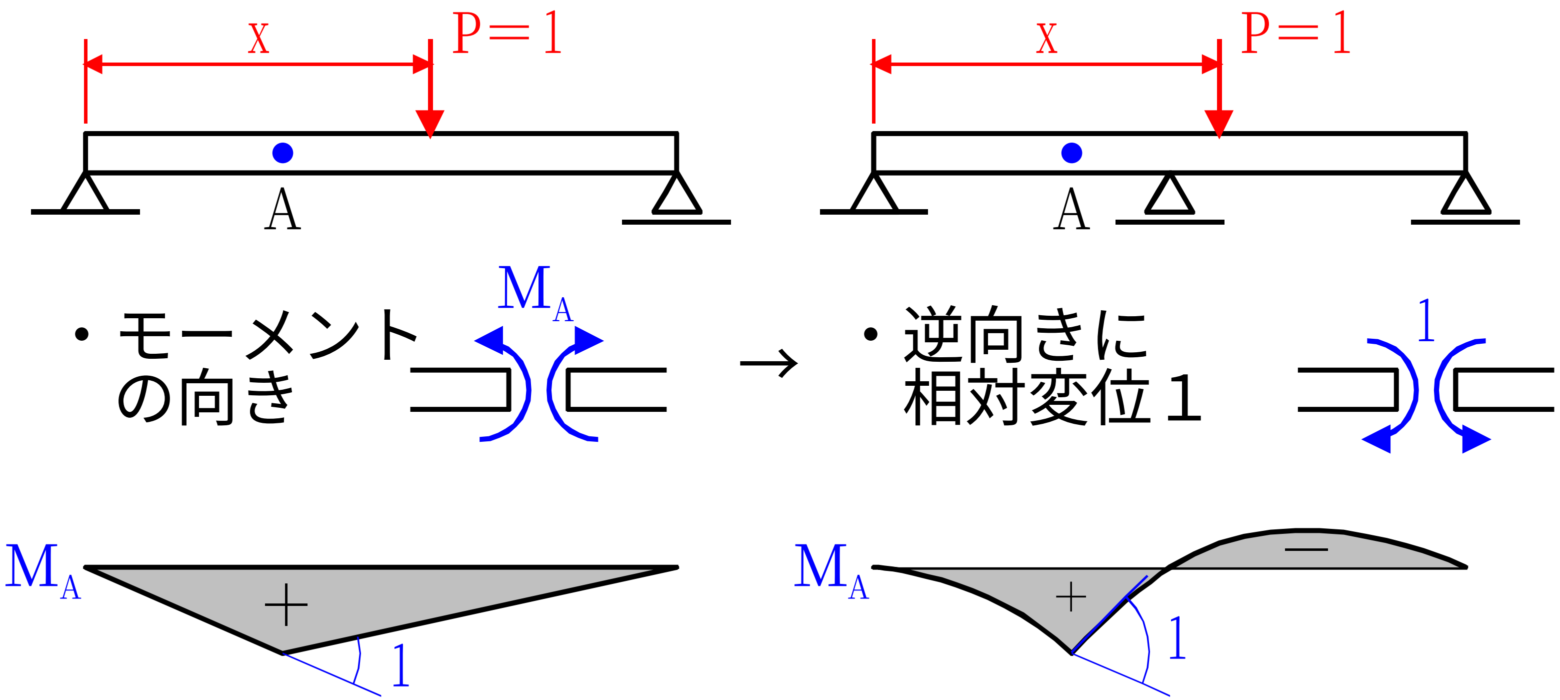
ミューラー・ブレスロウの定理

● 例：はりのせん断力の影響線



ミューラー・ブレスロウの定理

● 例：はりの曲げモーメントの影響線



M･Bの定理による影響線の求め方

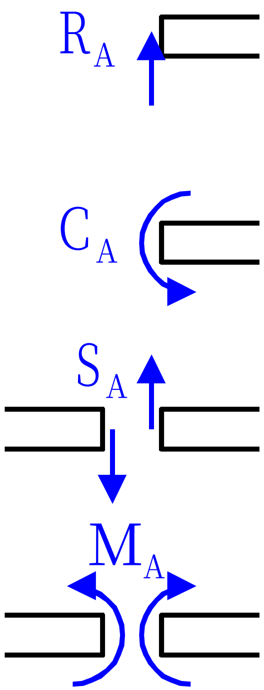
- 求めたい反力，断面力に対応する変位を与える
  - 変位の向きと大きさ：力と逆向き，大きさ１

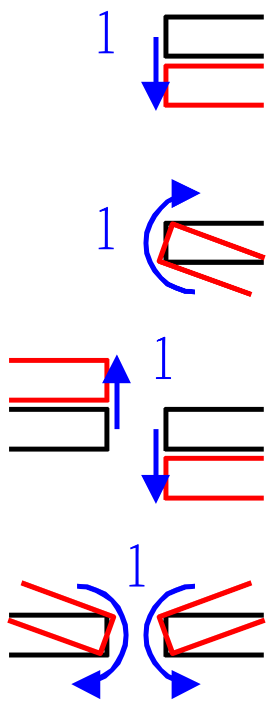
・鉛直反力 → ・鉛直変位

・回転反力 → ・回転変位

・せん断力 → ・相対変位

・モーメント → ・相対変位

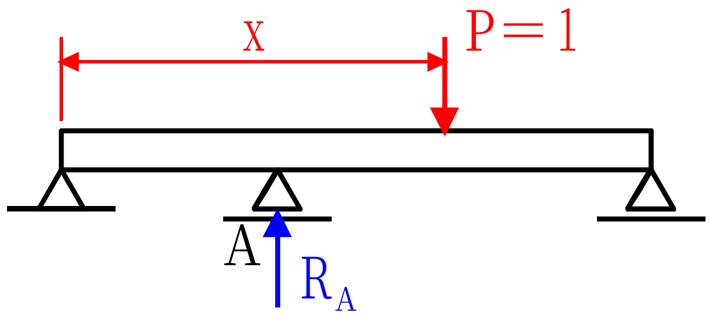




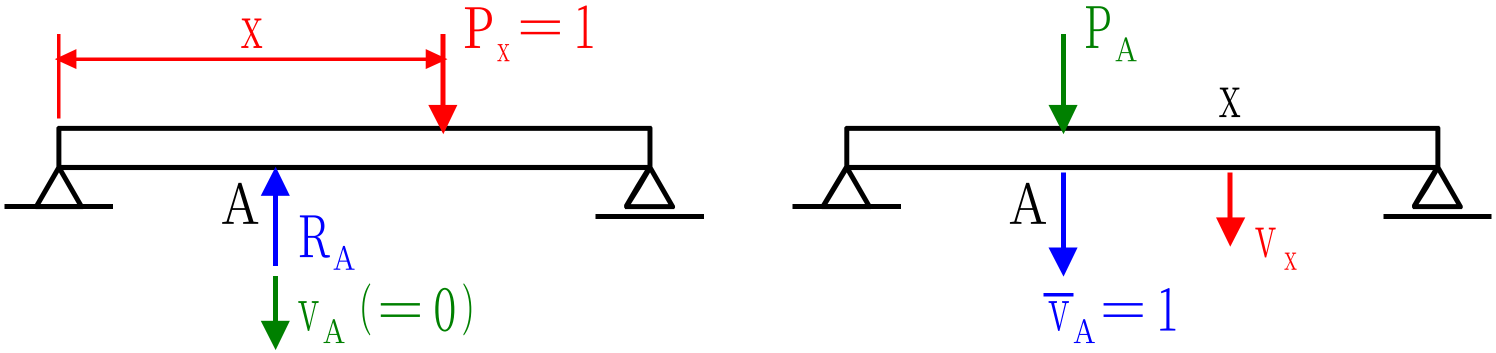
- そのときの変位曲線が求める影響線となる

ミューラー・ブレスロウの定理

- 証明（不静定）
  - 反力の例題



  - 等価な静定構造を考える



  - 相反定理より，$P_x \cdot v_x - R_A \cdot \bar{v}_A = P_A \cdot v_A$
  - $P_x = \bar{v}_A = 1$，$v_A = 0$より，$R_A = v_x$

相反定理による影響線の求め方

- 相反作用の定理の応用
  - 不静定構造でも可
  - トラスでも可

- たわみ（たわみ角）の影響線
  - マックスウェルの相反定理より求める

- 反力，断面力の影響線
  - ミューラー・ブレスロウの定理より求める